

21.2.2 公式法

1. 复习配方法，引入公式法

问题1 用配方法解下列方程：

$$\textcircled{1} 2x^2 - 12x + 10 = 0$$

$$\textcircled{2} 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

【回顾思考】用配方法解一元二次方程的步骤是什么？

- (1) 移项；
- (2) 二次项的系数化1；
- (3) 配方；
- (4) 开方；
- (5) 写解。

2. 推导求根公式

问题2 我们知道，任意一个一元二次方程都可以转化为一般形式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

你能用配方法得出它的解吗？

【自主探究】

用你能配方法解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 吗？

解：

$$ax^2 + bx = -c$$

← **移项:把常数项移到方程的右边;**

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

← **把二次项系数化为1;**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

配方:方程两边都加
上一次项系数绝对值
一半的平方;

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

化简变形

注意: 学生可能不
讨论而直接开方。
讨论: 是否能直接
开方?

因为 $a \neq 0$, 所以
 $4a^2 > 0$. 式子 $b^2 - 4ac$ 的
值有以下三种情况:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

(1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

所以方程有**两个不相等**的实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

(2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

可知方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

(3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$, 可知 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$,

因此方程无实数根。

归纳

一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”表示它。即 $\Delta = b^2-4ac$

1、一元二次方程的根的情况

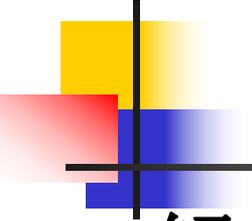
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

- (1) 当 $\Delta = b^2-4ac > 0$ 时，有两个不等的实数根；
- (2) 当 $\Delta = b^2-4ac = 0$ 时，有两个相等的实数根；
- (3) 当 $\Delta = b^2-4ac < 0$ 时，没有实数根。

2. 一般地，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$
($a \neq 0$) 的根由方程的系数 a, b, c 确定. 将 a, b, c 代入式子就得到方程的根:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \geq 0)$$

利用它解一元二次方程的方法叫做**公式法**.



例 1 解方程: $x^2 - 7x - 18 = 0$

解: $a = 1$ $b = -7$ $c = -18$

$$\because b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 121 > 0$$

方程有两个不等的实数根

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 11}{2}$$

即: $x_1 = 9$ $x_2 = -2$

用公式法解一元二次方程的一般步骤：

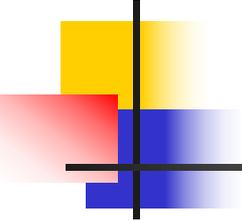
1、把方程化成一般形式，并写出 a 、 b 、 c 的值。

2、求出 $b^2 - 4ac$ 的值，

特别注意：当 $b^2 - 4ac < 0$ 时无解

3、代入求根公式： $\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

4、写出方程的解： x_1 、 x_2



例 2 解方程: $x^2 + 3 = 2\sqrt{3}x$

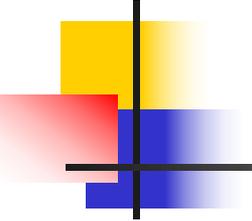
解: 化简为一般式: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

这里 $a = 1$ 、 $b = -2\sqrt{3}$ 、 $c = 3$

$$\because b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

即: $x_1 = x_2 = \sqrt{3}$



例 3 解方程: $(x-2)(1-3x)=6$

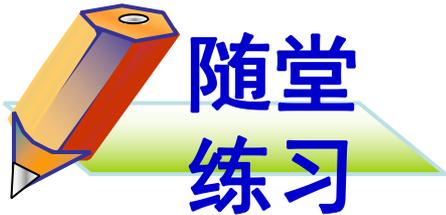
解: 去括号, 化简为一般式:

$$3x^2 - 7x + 8 = 0$$

这里 $a=3$ 、 $b=-7$ 、 $c=8$

$$\begin{aligned}\because b^2 - 4ac &= (-7)^2 - 4 \times 3 \times 8 \\ &= 49 - 96 = -47 < 0\end{aligned}$$

\therefore 方程没有实数解。



用公式法解下列方程：

(1) $2x^2 - 9x + 8 = 0;$

(2) $9x^2 + 6x + 1 = 0;$

(3) $16x^2 + 8x = 3.$



课堂提升：

当 m 取什么值时，一元二次方程
 $x^2+(2m+1)x+m^2-4=0$ 有两个相等的实数根？

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根.

$$m = -\frac{17}{4}$$

变式：有两个不相等的实数根？没有实数根？

5. 归纳小结

问题5：请大家思考并回答以下问题：

- (1) 本节课学了哪些内容？
- (2) 我们是用什么方法推导求根公式的？
- (3) 你认为判别式有哪些作用？
- (4) 应用公式法解一元二次方程的步骤是什么？

6. 布置作业

教科书习题 21.2 第 4, 5 题.