21.2.2　公式法

1．复习配方法，引入公式法

问题1 用配方法解下列方程:

①$2x^2-12x+10=0$

②$3x^2-6x-2=0$

【回顾思考】用配方法解一元二次方程的步骤是什么？

（1）移项;（2）二次项的系数化1;
（3）配方;（4）开方;（5）写解.

2．推导求根公式

问题2　我们知道，任意一个一元二次方程都可以转化为一般形式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

你能用配方法得出它的解吗？

【自主探究】

用你能配方法解方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$吗？

解:

$$ax^2+bx=-c$$

移项:把常数项移到方程的右边;

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

把二次项系数化为1;

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

配方:方程两边都加上一次项系数绝对值一半的平方;

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

化简变形

注意：学生可能不讨论而直接开方。讨论：是否能直接开方？

因为$a\neq0$，所以$4a^2>0$.式子b^2-4ac的值有以下三种情况:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

（1）当 $b^2-4ac>0$ 这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0,$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以方程有**两个不相等**的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

（2）当 ***b*²-4*ac*=0** 这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

可知方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

（3）当 b^2-4ac<0这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，可知 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，

因此方程无实数根。

归 纳

一般地，式子 b^2-4ac叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式，通常用希腊字母"△"表示它。即$\Delta = b^2-4ac$

1、一元二次方程的根的情况

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

（1）当$\Delta=b^2-4ac>0$时，有两个不等的实数根；

（2）当$\Delta=b^2-4ac=0$时，有两个相等的实数根；

（3）当$\Delta=b^2-4ac<0$时，没有实数根。

2. 一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根由方程的系数 a，b，c 确定．将 a，b，c 代入式子就得到方程的根：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geq 0)$$

利用它解一元二次方程的方法叫做公式法.

例 1 解方程： $x^2-7x-18=0$

解： $a=1 \quad b=-7 \quad c=-18$

$\because \quad b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(18)=121>0$

方程有两个不等的实数根

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{121}}{2\times1}=\frac{7\pm11}{2}$$

即： $x_1=9 \quad x_2=-2$

用公式法解一元二次方程的一般步骤：

1、把方程化成一般形式，并写出 a、b、c 的值。

2、求出 b^2-4ac 的值，

特别注意:当 $b^2-4ac<0$ 时无解

3、代入求根公式：$\therefore \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

4、写出方程的解： x_1、x_2

例 2 解方程： $x^2+3=2\sqrt{3}x$

解：化简为一般式：$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

这里 $a=1$、 b=$-2\sqrt{3}$、 c= 3

$\because \quad b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

即： $x_1=x_2=\sqrt{3}$

例 3 解方程：$(x-2)(1-3x)=6$

解：去括号，化简为一般式：

$$3x^2-7x+8=0$$

这里 $a=3$、 $b=-7$、 $c=8$

$$\because\ b^2-4ac=(-7)^2-4\times 3\times 8$$

$$=49-96=-47<0$$

$\therefore$ 方程没有实数解。

随堂练习

用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-9x+8=0$;

（2）$9x^2+6x+1=0$;

（3）$16x^2+8x=3$.

课堂提升：

当m取什么值时，一元二次方程$x^2+(2m+1)x+m^2-4=0$有两个相等的实数根?

当$b^2-4ac=0$时，一元二次方程有两个相等的实数根.

$$m=-\frac{17}{4}$$

变式：有两个不相等的实数根？没有实数根？

5．归纳小结

问题5：请大家思考并回答以下问题：

（1）本节课学了哪些内容？

（2）我们是用什么方法推导求根公式的？

（3）你认为判别式有哪些作用？

（4）应用公式法解一元二次方程的步骤是什么？

6．布置作业

教科书习题 21.2　第 4，5 题.