



22.2.4根与系数的关系 (第1课时)

回忆

1.一元二次方程的一般形式是什么？

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

2.一元二次方程的求根公式是什么？

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0)$$

3.一元二次方程的根的情况怎样确定？

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow \text{两个不相等的实数根} \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow \text{两个相等的实数根} \\ \Delta < 0 \Leftrightarrow \text{没有实数根} \end{cases}$$

方程	两个根		两根之和	两根之积	a与b之间关系	a与c之间关系
	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$x^2 + 3x - 4 = 0$	-4	1	-3	-4	-3	-4
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2	3	5	6	5	6
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

猜想： 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别是 x_1 、 x_2 ，那么，你可以发现什么结论？

已知：如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别是 x_1 、 x_2 . zxxk

求证： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$

推导:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-2b}{2a} \\&= \frac{-b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\&= \frac{4ac}{4a^2} \\&= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

的两个根分别是 x_1 、 x_2 ， 那么：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

这就是一元二次方程根与系数的关系，也叫韦达定理。

一、根与系数的关系的直接应用

1、下列方程中，两根的和与两根的积各是多少？

(1) $x^2 - 3x + 1 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ $x_1 x_2 = 1$

(3) $2x^2 - 3x = 0$

(2) $3x^2 - 2x = 2$ $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ ✓

(4) $4x^2 = 1 + 2x$ $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$ ✓

解: (1) $a=1$ $b=-3$ $c=1$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

二、根与系数的关系的间接应用

1、设 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的根

利用根与系数的关系，求下列各式的值：

(1). $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

(2). $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

$x_1 + x_2$

$x_1 x_2$

解：由 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 易知

$$x_1 + x_2 = -4$$

$$x_1 x_2 = -3$$

(1) 原式 = $x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1$
 $= -3 + (-4) + 1 = -6$

(2) 原式 = $\frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$
 $= \frac{(-4)^2 - 2(-3)}{-3} = \frac{16 + 6}{-3} = -\frac{22}{3}$

练兵场

2、利用根与系数的关系，求一元二次方程

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

两个根的：（1）平方和；（2）倒数和

解：设方程的两个根是 x_1 x_2 ，那么

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}, x_1 \times x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(1) \because (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$(2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \left(-\frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

3: 已知方程 $\frac{1}{2}x^2 = 2x + 1$ 的两根 x_1, x_2 ,
不解方程, 求下列各式的值. Zxx.k

(1) $(x_1 - x_2)^2$ (2) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

总结归纳

1. 一元二次方程根与系数的关系是什么？
2. 应用一元二次方程的根与系数关系时，首先要把已知方程化成一般形式。
3. 应用一元二次方程的根与系数关系时，要特别注意，方程有实根的条件，即在初中代数里，当且仅当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，才能应用根与系数的关系。



作业

1. 已知方程 $5x^2 + kx - 6 = 0$ 的一个根是2，求它的另一个根及k的值.

2. 方程 $x^2 + 3kx + 2k - 1 = 0$ 的两根互为倒数，求k的值.

补充规律:

两根均为负的条件: x_1+x_2 _____ 且 x_1x_2 _____.

两根均为正的条件: x_1+x_2 _____ 且 x_1x_2 _____.

两根一正一负的条件: x_1+x_2 _____ 且 x_1x_2 _____.

当然, 以上还必须满足一元二次方程有根的条件: $b^2-4ac \geq 0$

引申:1、若 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

(1) 若两根互为相反数, 则 $b = 0$;

(2) 若两根互为倒数, 则 $a = c$;

(3) 若一根为0, 则 $c = 0$;

(4) 若一根为1, 则 $a + b + c = 0$;

(5) 若一根为 -1 , 则 $a - b + c = 0$;

(6) 若 a 、 c 异号, 方程一定有两个实数根.