

八年级数学·上 新课标 [冀教]

第十二章 分式和分式方程

12.2 分式的乘除 (第2课时)

学习新知

检测反馈

问题思考

大拖拉机 m 天耕地 a 平方千米,小拖拉机 n 天耕地 b 平方千米,大拖拉机的工作效率是小拖拉机的工作效率的多少倍?

大拖拉机的工作效率是 $\frac{a}{m}$ 平方千米/天,
小拖拉机的工作效率是 $\frac{b}{n}$ 平方千米/天,

进一步得出大拖拉机的工作效率是小拖拉机的工作效率的 $\left(\frac{a}{m} \div \frac{b}{n}\right)$ 倍.

从上面的问题可知,实际问题中有时需要运用分式的除法.

活动一：观察与思考——探究分式的除法法则

观察下列运算：
$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

猜一猜：
$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = ?$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

分式的除法法则：分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘。

[知识拓展] 根据法则我们知道，分式的除法需转化为乘法，转化的过程实际上是“一变一倒”的过程，即除号变乘号，除式的分子和分母颠倒位置。

活动二：例题讲解——应用新知

例1 计算下列各式：

$$\textcircled{1} \frac{5y^2}{2x} \div \frac{y}{4x}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x-6}{x-2} \div \frac{x-3}{x^2-4}$$

$$\textcircled{3} \frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2} \div \frac{a+3b}{a^2-b^2}$$

解：

$$\textcircled{1} \frac{5y^2}{2x} \div \frac{y}{4x} = \frac{5y^2}{2x} \cdot \frac{4x}{y} = 10y$$

$$\textcircled{2} \frac{2x-6}{x-2} \div \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{2x-6}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x-3} = \frac{2(x-3)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 2x+4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2} \div \frac{a+3b}{a^2-b^2} \\ = \frac{a^2+3ab}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a+3b} = \frac{a(a+3b)(a+b)(a-b)}{(a+b)^2(a+3b)} = \frac{a(a-b)}{a+b} \end{aligned}$$

例2 八年级(一)班的同学在体育课上进行长跑训练,小芳跑完1000 m用了 t s,小华用相同的时间跑完了800 m.这次训练,小芳的平均速度是小华的平均速度的多少倍?

解:小芳的平均速度为 $\frac{1000}{t}$ m/s, 小华的平均速度为 $\frac{800}{t}$ m/s,

$$\frac{1000}{t} \div \frac{800}{t} = \frac{1000}{t} \times \frac{t}{800} = \frac{1000}{800} = 1.25$$

答:这次训练,小芳的平均速度是小华的平均速度的1.25倍.

例3 如图所示，“丰收1号”小麦的试验田是边长为 a m ($a > 1$) 的正方形去掉一个边长为 1 m 的正方形蓄水池后余下的部分，“丰收2号”小麦的试验田是边长为 $(a-1)$ m 的正方形，两块试验田的小麦都收获了 500 kg.

(1) 哪种小麦的单位面积产量高?

(2) 高的单位面积产量是低的单位面积产量的多少倍?



解：

(1) “丰收1号”小麦的试验田面积是 $(a^2-1)\text{m}^2$,
单位面积产量是 $\frac{500}{a^2-1}\text{kg}$, “丰收2号”小麦的试验田
面积是 $(a-1)^2\text{m}^2$, 单位面积产量是 $\frac{500}{(a-1)^2}\text{kg}$.

$$\because a > 1,$$

$$\therefore (a-1)^2 > 0, \quad a^2-1 > 0.$$

由图可得 $(a-1)^2 < a^2-1$.

$$\therefore \frac{500}{a^2-1} < \frac{500}{(a-1)^2}.$$

所以“丰收2号”小麦的单位面积产量高.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{500}{(a-1)^2} \div \frac{500}{a^2-1} \\ &= \frac{500}{(a-1)^2} \cdot \frac{a^2-1}{500} \\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2} \\ &= \frac{a+1}{a-1} \end{aligned}$$

所以“丰收2号”小麦的单位面积产量是
“丰收1号”小麦的单位面积产量的 $\frac{a+1}{a-1}$ 倍.

课堂小结

1. 分式的除法法则:

语言叙述:分式除以分式,把除式的分子与分母颠倒位置后,与被除式相乘.

字母表示:
$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

2. 注意事项:

- (1) 运用法则时,注意符号的变化;
- (2) 因式分解在分式除法中的应用;
- (3) 步骤要完整,结果要化最简. 最后结果中的分子、分母既可保持乘积的形式,也可以写成一个多项式的形式.

1.化简 $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1} \div \frac{a-1}{a}$ 的结果是 (**B**)

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{a}{a+1}$ C. $\frac{a+1}{a}$ D. $\frac{a+1}{a+2}$

【解析】原式 = $\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2} \times \frac{a}{a-1} = \frac{a}{a+1}$. 故选B.

2.计算 $a \div \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ 的结果是 (**D**)

A. a B. a^2 C. $\frac{1}{a^2}$ D. $\frac{b^2}{a}$

【解析】原式 = $a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}$. 故选D.

3. 计算 $-\frac{n}{m^2} \div \frac{n^2}{m^3} \div \frac{m}{n^2}$ 的结果为 (D)

A. $\frac{m^2}{n^2}$ B. $-\frac{m^2}{n^3}$ C. $-\frac{n}{m^4}$ D. $-n$

【解析】原式 = $-\frac{n}{m^2} \times \frac{m^3}{n^2} \times \frac{n^2}{m} = -n$. 故选D.

4. 化简 $\frac{m-1}{m} \div \frac{m-1}{m^2}$ 的结果是 (A)

A. m B. $\frac{1}{m}$ C. $m-1$ D. $\frac{1}{m-1}$

【解析】原式 = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m^2}{m-1} = m$. 故选A.

5. 化简 $(ab + b^2) \div \frac{a^2 - b^2}{a}$ 的结果是 (A)

A. $\frac{ab}{a-b}$ B. $\frac{ab}{a+b}$ C. $\frac{b}{a-b}$ D. $\frac{b}{a+b}$

【解析】原式 = $b(a+b) \cdot \frac{a}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a-b}$. 故选A.

6. 计算 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 6x + 9} \div \frac{x+y}{2x-6}$ 的结果是 (C)

A. $\frac{x-y}{x-3}$ B. $\frac{2}{x-3}$ C. $\frac{2x-2y}{x-3}$ D. $\frac{2x-y}{x-3}$

【解析】原式 = $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{2x-6}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{2(x-3)}{x+y} = \frac{2(x-y)}{x-3} = \frac{2x-2y}{x-3}$.

故选C.

7. $a \div b \times \frac{1}{b} \div c \times \frac{1}{c} \div d \times \frac{1}{d}$ 等于 (**B**)

A. a B. $\frac{a}{b^2 c^2 d^2}$ C. $\frac{a}{d}$ D. $ab^2 c^2 d^2$

【解析】原式 = $a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{d} \times \frac{1}{d} = \frac{a}{b^2 c^2 d^2}$. 故选B.

8. 计算

$$(1) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \div \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

$$(2) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} \div \frac{x - 1}{x}$$

【解析】 将分式的除法转化为分式的乘法，然后按照分式的乘法法则进行计算。

解： (1)
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \div \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

$$(2) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} \div \frac{x - 1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x+2}$$

9.由甲地到乙地的一条铁路全程为 v km, 火车全程运行时间为 a h; 由甲地到乙地的公路全程为这条铁路全程的 m 倍, 汽车全程运行时间为 b h. 那么火车的速度是汽车速度的多少倍?

【解析】 根据路程除以时间等于速度分别表示出火车与汽车的速度, 即可得出所求.

解: 火车速度为 $\frac{v}{a}$ km/h, 汽车速度为 $\frac{mv}{b}$ km/h,

则
$$\frac{v}{a} \div \frac{mv}{b} = \frac{v}{a} \cdot \frac{b}{mv} = \frac{b}{am}.$$

即火车的速度是汽车速度的 $\frac{b}{am}$ 倍.

