

八年级数学·上 新课标 [冀教]

## 第十二章 分式和分式方程

### 12.3 分式的加减 (第2课时)

学习新知

检测反馈

## 导入新课

有一财主死后,几个儿子高兴地打开父亲留下的藏宝地图看到上面有一段文字记录:

计算 
$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \div \frac{x - 1}{x^2 + x} - x$$

的值,就是我留给你们的全部宝物.

老大拿出纸笔一算,一气之下将藏宝图一把扔了,老二连忙捡起,经过仔细思考后干脆一把火烧掉了它.财主忘记了写  $x$  的值,他的儿子是怎么计算出宝物的情况的呢?财主到底留下了多少宝物呢?通过本节课的学习之后,你就会明白其中的道理.

# 活动一：复习异分母分式的加减法

例1 计算下列各式：

$$(1) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}$$

$$(2) \frac{1}{9a^2 + 6a + 1} - \frac{1}{3a + 1}$$

解：(1) 
$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{8x}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1}{9a^2 + 6a + 1} - \frac{1}{3a + 1} \\ &= \frac{1}{(3a+1)^2} - \frac{3a+1}{(3a+1)^2} \\ &= \frac{1 - (3a + 1)}{(3a + 1)^2} \\ &= -\frac{3a}{(3a + 1)^2} \end{aligned}$$

## 活动二： 分式的混合运算

试着做做

计算  $\left(\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}\right) \div \frac{a+b}{ab}$

解：  $\left(\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}\right) \div \frac{a+b}{ab}$

$$= \left(\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}\right) \div \frac{a+b}{ab}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} \times \frac{ab}{a+b}$$

$$= ab$$

例2 计算： $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x^2}$

解： $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x^2}$

$$= \left[ \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right] \div \frac{x-4}{x^2}$$

$$= \left[ \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2} - \frac{x(x-1)}{x(x-2)^2} \right] \div \frac{x-4}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2} \div \frac{x-4}{x^2} = \frac{x-4}{x(x-2)^2} \div \frac{x-4}{x^2}$$

$$= \frac{x-4}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x^2}{x-4} = \frac{x}{(x-2)^2}.$$

做一做：当  $a = -\frac{2}{5}$  时，求  $\frac{1}{a+1} - \frac{a^2+6a+9}{a^2-1} \cdot \frac{a-1}{(a+3)(a+1)}$  的值。

解：原式化简得： $-\frac{2}{(a+1)^2}$

代入  $a = -\frac{2}{5}$  得  $-\frac{50}{9}$

**例 计算：**  $\left( \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} - \frac{x}{x + 2} \right) \div \frac{x - 1}{x + 2}$

**方法一：** 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除以一个数等于乘这个数的倒数将除法运算化为乘法运算，约分即可得到结果。

**解：** 原式 =  $\left( \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2}{x-1} = \frac{-2}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$

**方法二：** 将除法变为乘法，运用乘法分配律计算。

**解：** 原式 =  $\left( \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-1} - \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-1}$   
 $= \frac{x-2}{x-1} - \frac{x}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$

例4 计算  $(\frac{2a}{b})^2 \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \div \frac{b}{4}$

解:  $(\frac{2a}{b})^2 \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \div \frac{b}{4}$

$$= \frac{4a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{b}$$

$$= \frac{4a^2}{b^2(a-b)} - \frac{4a}{b^2}$$

$$= \frac{4a^2}{b^2(a-b)} - \frac{4a(a-b)}{b^2(a-b)}$$

$$= \frac{4a^2 - 4a^2 + 4ab}{b^2(a-b)} = \frac{4ab}{b^2(a-b)} = \frac{4a}{ba - b^2}.$$

**例5** 计算  $(m + 2 + \frac{5}{2-m}) \cdot \frac{2m-4}{3-m}$

**解:**  $(m + 2 + \frac{5}{2-m}) \cdot \frac{2m-4}{3-m}$

$$= \frac{(m+2)(2-m) + 5}{2-m} \cdot \frac{2m-4}{3-m}$$

$$= \frac{9-m^2}{2-m} \cdot \frac{2(m-2)}{3-m}$$

$$= \frac{(3-m)(3+m)}{2-m} \cdot \frac{-2(m-2)}{3-m} = -2m-6$$

## [知识拓展]

进行分式的加、减、乘、除混合运算要注意以下几点：

(1) 数的运算顺序及运算规律对分式运算同样适用.

(2) 分式的混合运算中要注意各分式中分子、分母符号的处理, 结果中分子或分母的系数是负数时, 要把“-”号提到分式本身的前边.

(3) 注意括号的“添”或“去”.

(4) 分式运算与数的运算一样, 结果必须达到最简, 能约分的要约分, 保证结果是最简分式或整式.

## 课堂小结

分式的混合运算，要注意运算顺序，式与数有相同的混合运算顺序：

(1) 先乘方，再乘除，然后加减，有括号的先算括号里面的；

(2) 分式运算的最后结果分子、分母要进行约分，最后的结果化成最简分式或整式，恰当地使用运算律会使运算简便。

1. (2015·泰安中考) 化简  $\left(a + \frac{3a-4}{a-3}\right)\left(1 - \frac{1}{a-2}\right)$  的结果等于 ( B )

A.  $a - 2$     B.  $a + 2$     C.  $\frac{a-2}{a-3}$     D.  $\frac{a-3}{a-2}$

【解析】原式 =  $\frac{a(a-3)+3a-4}{a-3} \cdot \frac{a-2-1}{a-2} = \frac{(a+2)(a-2)}{a-3} \cdot \frac{a-3}{a-2} = a+2$  . 故选B.

2. (2015·益阳中考) 下列等式成立的是 ( C )

A.  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{a+b}$     B.  $\frac{2}{2a+b} = \frac{1}{a+b}$     C.  $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$     D.  $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a+b}$

【解析】A. 原式 =  $\frac{b+2a}{ab}$ , 错误; B. 原式不能约分, 错误;

C. 原式 =  $\frac{ab}{b(a-b)} = \frac{a}{a-b}$ , 正确; D. 原式 =  $\frac{a}{-(a-b)} = -\frac{a}{a-b}$ , 错误, 故选C.

3. 化简  $\left(1 + \frac{a^2}{1+2a}\right) \div \frac{1+a}{1+2a}$  的结果为 ( **A** )

A.  $1+a$     B.  $\frac{1}{1+2a}$     C.  $\frac{1}{1+a}$     D.  $1-a$

**【解析】** 原式=

$$\frac{1+2a+a^2}{1+2a} \div \frac{1+a}{1+2a} = \frac{(1+a)^2}{1+2a} \cdot \frac{1+2a}{1+a} = 1+a \quad . \text{ 故选A.}$$

4. 下列各式的运算结果中，正确的是（ **B** ）

**A.**  $\frac{3}{x} \div \frac{x}{3} = \frac{9}{x}$       **B.**  $\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-1}\right) \cdot (x-3) = \frac{2}{x-1}$

**C.**  $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) \cdot \frac{4-a^2}{a} = 4$       **D.**  $\left(\frac{b^2}{a+b} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \frac{ab}{a-b} = ab$

**【解析】** 解：**A.**  $\frac{3}{x} \div \frac{x}{3} = \frac{3}{x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{x^2}$ ，故此选项错误；

**B.**  $\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-1}\right) \cdot (x-3) = \frac{1}{x-3} \times (x-3) - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \times (x-3) = 1 - \frac{1}{x-1} \times (x-3) = \frac{2}{x-1}$ ，故此选项正确；

**C.**  $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) \cdot \frac{4-a^2}{a} = -(a+2) - (2-a) = -4$ ，故此选项错误；

**D.**  $\left(\frac{b^2}{a+b} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \frac{ab}{a-b} = \frac{(b+a)(b-a)}{a+b} \cdot \frac{ab}{a-b} = -ab$ ，故此选项错误； 故选**B**。

5. 计算  $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) \div \frac{x+y}{x}$  的结果为 ( A )

A.  $\frac{x-y}{y}$

B.  $\frac{x+y}{y}$

C.  $\frac{x-y}{x}$

D.  $\frac{x+y}{x}$

【解析】原式 =  $\frac{x^2 - y^2}{xy} \div \frac{x+y}{x} = \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x-y}{y}$  . 故选A.

6. 计算  $1 - \frac{1+m}{1-m} \cdot (m^2 - 1)$  的结果是 ( D )

A.  $2m^2 + 2m$

B. 0

C.  $-m^2 - 2m$

D.  $m^2 + 2m + 2$

【解析】原式 =

$$1 - \frac{1+m}{1-m} \cdot (m+1)(m-1) = 1 + \frac{m+1}{m-1} \cdot (m+1)(m-1).$$

$$= 1 + (m+1)^2 = m^2 + 2m + 2. \quad \text{故选D.}$$

7. 化简  $(x - \frac{3x+4}{x}) \div (1 + \frac{1}{x})$  的结果是 ( **A** )

**A.  $x - 4$**  **B.  $x+1$**  **C.  $x$**  **D. 以上答案都不是**

**【解析】** 原式=

$$\left(\frac{x^2}{x} - \frac{3x+4}{x}\right) \div \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x} \div \frac{x+1}{x} = \frac{(x-4)(x+1)}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = x-4.$$

8. 化简  $\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1}$  的结果为  **$x-1$** .

**【解析】** 先确定分式的运算顺序：先算小括号内的，再将除法运算转化为乘法运算，在计算时要把分子或分母中的多项式进行因式分解，最后约分化简即可。

原式=  $\frac{x-1+2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} = x-1$  . 故填  **$x-1$**  .

9.先化简，再求值： $(a + \frac{1}{a+2}) \div (a - 2 + \frac{3}{a+2})$ ,

其中， $a$ 满足 $a-2=0$ .

**解析:**对括号里面的式子进行通分的同时,利用平方差公式和完全平方公式进行因式分解,再根据运算顺序进行化简,最后代入求值.

**解:** 原式=

$$\frac{a^2 + 2a + 1}{a + 2} \div \frac{a^2 - 1}{a + 2} = \frac{(a + 1)^2}{a + 2} \times \frac{a + 2}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{a + 1}{a - 1}.$$

由 $a-2=0$ ，得 $a=2$ ，所以原式=3.

10. 有两个工人甲和乙, 他们每小时分别制作零件 $a$ 个,  $b$ 个, 现要赶制一批零件, 若甲单独完成任务需要 $m$ 小时, 如果甲、乙两人同时工作, 那么比甲单独完成任务提前多长时间?

**解析:** 由甲单独完成任务的时间是 $m$ 小时, 可表示出两人合作完成任务的时间, 即可确定出甲、乙两人同时工作比甲单独完成任务提前的时间.

**解:** 甲单独完成任务的时间是 $m$ 小时, 甲乙两人合作完成任务的时间是 $\frac{ma}{a+b}$ 小时, 则提前完成任务的时间是

$$m - \frac{ma}{a+b} = \frac{m(a+b) - ma}{a+b} = \frac{mb}{a+b} \quad (\text{小时}), \quad \text{则甲、乙两人同时工作,}$$

比甲单独完成任务提前  $\frac{mb}{a+b}$  小时.