第十七章 特殊三角形

小结与复习

知识回顾 考点分析 复习归纳 课后作业

知识回顾

◆等腰三角形的定义

有__两条边__相等的三角形叫做等腰三角形.

◆等腰三角形的性质定理1

等腰三角形的两个__底角__相等（__等边对等角__）.

◆等腰三角形的性质定理2

等腰三角形的__顶角平分线__，__底边上的中线__，__底边上的高__互相重合（通常说成等腰三角形的“__三线合一__”）.

◆等腰三角形的判定定理

如果一个三角形有__两个角__相等, 那么这个三角形是等腰三角形（简写成“__等角对等边__”）.

◆等边三角形的判定

有一个角是___60°___的等腰三角形是等边三角形.

◆直角三角形的性质定理1

直角三角形的两个锐角___互余___.

◆直角三角形的判定定理

如果一个三角形的两个角___互余___，那么这个三角形是直角三角形.

◆直角三角形的性质定理

直角三角形斜边上的中线等于斜边的___一半___.

◆含30°角的直角三角形的性质

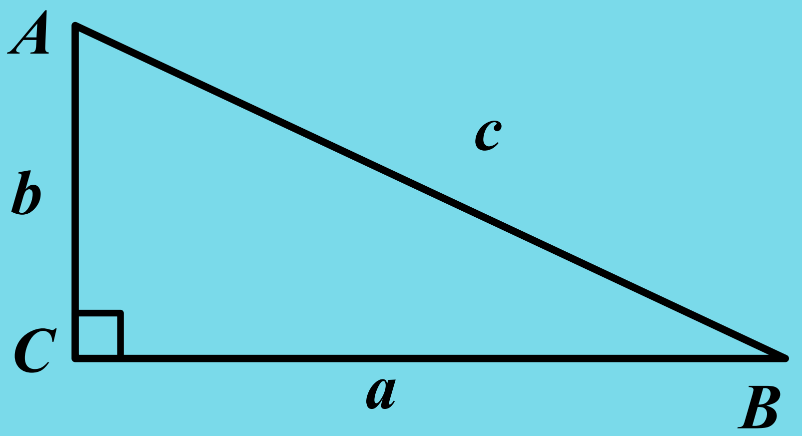
在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的___一半___.

◆勾股定理

如果直角三角形两直角边分别为a，b斜边为c，那么

$a^2+b^2=c^2$.

◆勾股定理的逆定理



如果△ABC的三边a，b，c

满足 $a^2+b^2=c^2$ ，那么这个

三角形是直角三角形.

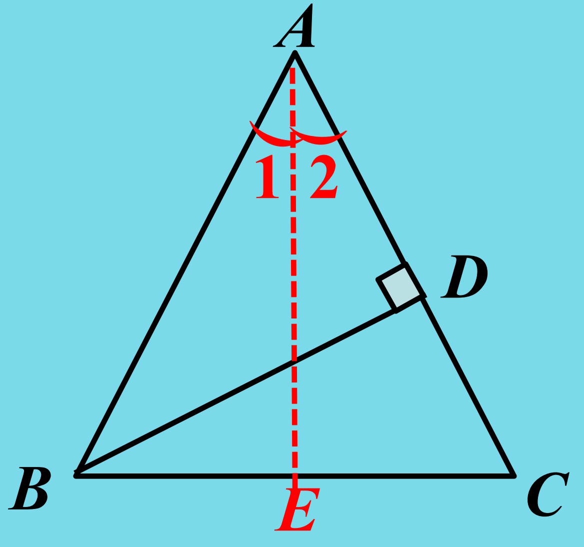
◆直角三角形全等的判定定理

斜边和直角边对应相等的两个直角三角形全等.

专题一　等腰三角形的性质与判定

例1　如图所示，在△ABC中，$AB=AC,BD\perp AC$于D. 求证：$\angle BAC=2\angle DBC$.

【解析】根据等腰三角形“三线合一”的性质，可作顶角$\angle BAC$的平分线，来获取角的数量关系.



【答案】作$\angle BAC$的平分线AE,交BC于点E,如图所示，则

$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC.$

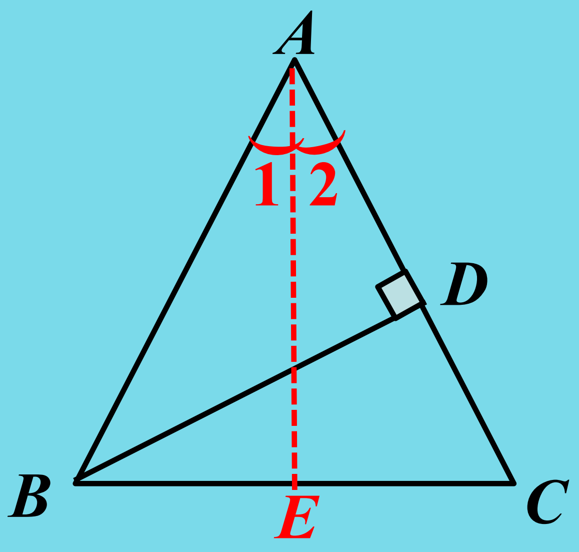
$\because AB=AC$, $\therefore AE\perp BC$.

$\therefore \angle 2+\angle ACB=90°$.

$\because BD\perp AC$, $\therefore \angle DBC+\angle ACB=90°$.

$\therefore \angle 2=\angle DBC$.

$\therefore \angle BAC=2\angle DBC$.



【归纳拓展】等腰三角形的性质与判定是本章的重点之一，它们是证明线段相等和角相等的重要依据，等腰三角形的特殊情形—等边三角形的性质与判定应用也很广泛，有一个角是30°的直角三角形的性质是证明线段之间的倍分关系的重要手段.

【配套训练】如图所示，在△ABC中，$AC=BC$, $\angle ACB=90°$,点D是

AC上的一点，AE垂直BD的延长线于点E, 且$AE=\frac{1}{2}BD$.

求证：BD平分$\angle ABC$.

【证明】延长AE交BC的延长线于点F, 如图所示.

∵$\angle ACB=90°$, ∴$\angle ACF=\angle ACB=90°$.

∵$\angle F+\angle FAC=90°$, ∴$\angle F+\angle EBF=90°$.

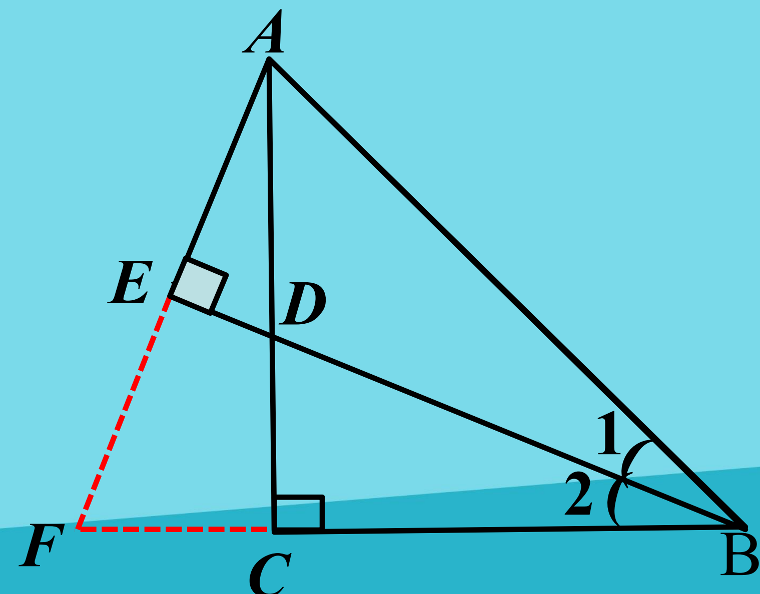
∵$\angle FAC=\angle EBF$.

在△ACF和△BCD中，

$$\begin{cases}\angle FAC=\angle DBC,\\ AC=BC,\\ \angle ACF=\angle BCD,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACF\cong\triangle BCD$(ASA).

∴ $AF=BD$.



$\because AE=\frac{1}{2}BD$, $\therefore AE=EF$.

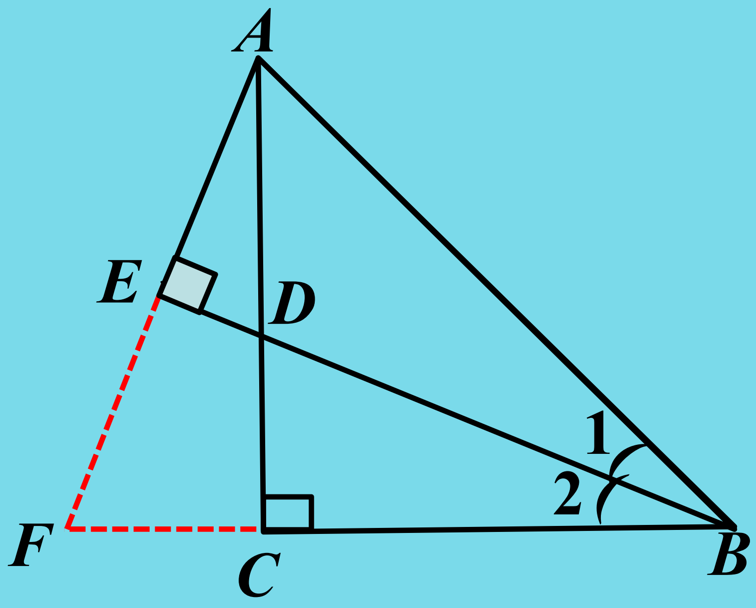
在$\triangle AEB$和$\triangle FEB$中,

$$\begin{cases} AE=FE, \\ \angle AEB=\angle FEB, \\ EB=EB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle FEB$(SAS).

$\therefore \angle ABE=\angle FBE$,

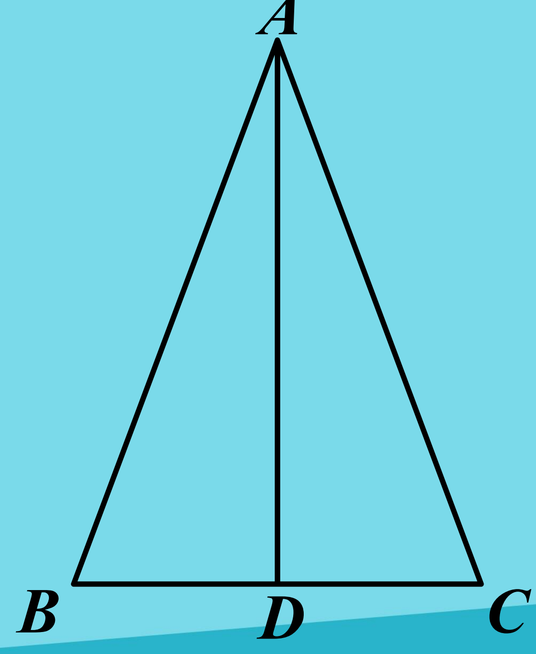
即BD平分$\angle ABC$.



专题二 利用直角三角形全等解决实际问题

例2 如图，两根长均为12米的绳子一端系在旗杆上，旗杆与地面垂直，另一端分别固定在地面上的木桩上，两根木桩离旗杆底部的距离相等吗？

【分析】将本题中实际问题转化为数学问题就是证明$BD=CD$.由已知条件可知$AB=AC$.$AD\perp BC$.



【解】相等，理由如下：

∵$AD \perp BC$,

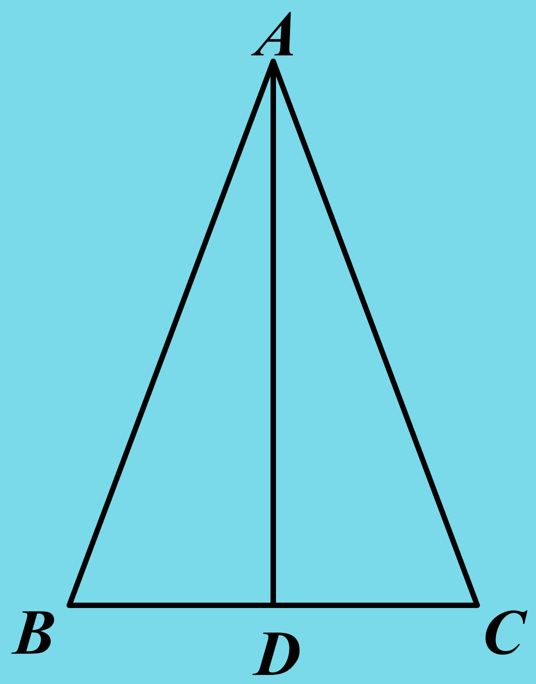
∴$\angle ADB=\angle ADC=90°$.

在Rt△ADB和Rt△ADC中，

$$\begin{cases} AD=AD, \\ AB=AC, \end{cases}$$

∴ Rt△ADB ≌ Rt△ADC(HL).

∴$BD=CD$.



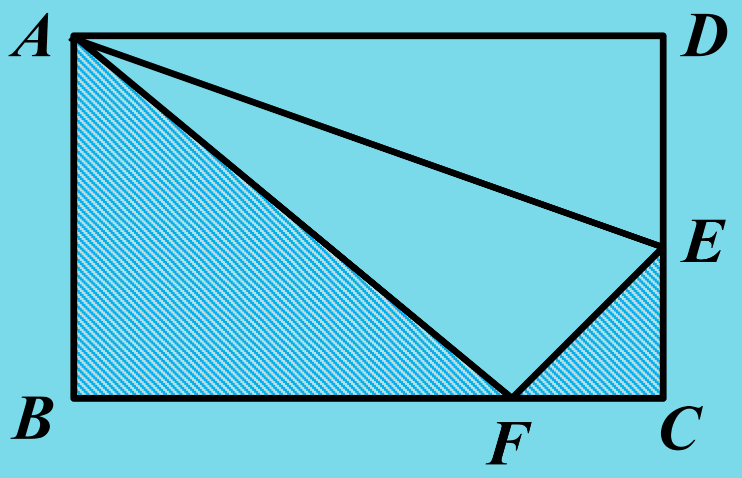
【归纳拓展】利用全等三角形可以测量一些不易测量的距离，长度，还可对某些因素作出判断，一般采用以下步骤：

（1）先明确实际问题；（2）根据实际抽象出几何图形；

（3）经过分析，找出证明途径；（4）书写证明过程.

专题三　勾股定理

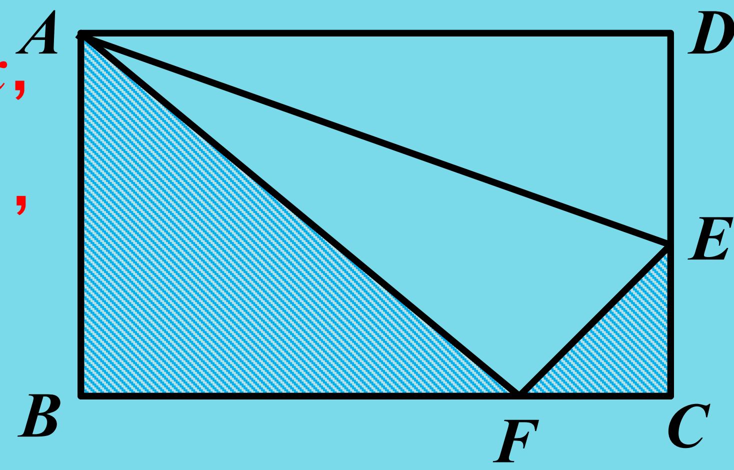
例3 如图，将长方形纸片$ABCD$沿AE折叠，顶点D恰好落在BC边上的点F处，已知CE=3cm，AB=8cm，求图中阴影部分的面积.



【分析】本题主要考察勾股定理和折叠的性质，根据勾股定理列出方程即可求解.

【解】易知：$AF=AD$，$EF=DE-DC-CE=AB-CE=8-3=5$（cm）

在Rt△ABC中，由勾股定理，得$CF=\sqrt{EF^2-CE^2}$.



设在Rt△ABC中，由勾股定理，得$BF=x$，

则$AF=AD=BC=BF+CF=$（$x+4$）（cm），

在Rt△ABC中，由勾股定理，

得$8^2+x^2=(x+4)^2$.

解得$x=6$，即$BF=6$cm，所以$BC=BF+CF=10$（cm），所以阴影部分的面积为

$$\frac{1}{2}BF\cdot AB+\frac{1}{2}CF\cdot CE=\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{1}{2}\times 4\times 3=30(\text{cm}^2).$$

专题四　本章的数学思想与解题方法

◆分类讨论思想

例4　等腰三角形的周长为20cm, 其中两边的差为8cm, 求这个等腰三角形各边的长.

【解析】要考虑腰比底边长和腰比底边短两种情况.

【答案】若腰比底边长，设腰长为$x$cm, 则底边长为（x-8)cm，根据题意得 $2x+x-8=20$,

解得 $x=\frac{28}{3}$, ∴$x-8=\frac{4}{3}$；

若腰比底边短，设腰长为$y$cm,则底边长为（y+8)cm, 根据题意得$2y+y+8=20$,解得$y=4$, ∴$y+8=12$,但$4+4=8<12$, 不符合题意.

故此等腰三角形的三边长分别为$\frac{28}{3}$cm, $\frac{28}{3}$cm, $\frac{4}{3}$cm.

【归纳拓展】根据等腰三角形的性质求边长或度数时，若已知条件未明确所给的角是顶角还是底角、所给的边是腰还是底边时，要分两种情况才能使答案不致缺漏，同时，求出答案后要和三角形的内角和定理及三角形三边关系对照，若不符合，则答案不成立，要舍去，这样才能保证答案准确.

【配套训练】等腰三角形的两边长分别为4和6，求它的周长.

【答案】①若腰长为6，则底边长为4，周长为6+6+4=16；

②若腰长为4，则底边长为6，周长为4+4+6=14.

故这个三角形的周长为14或16.

复习归纳

- 特殊三角形
  - 等腰三角形
    - 等腰三角形的性质
    - 等腰三角形的判定
  - 等边三角形
    - 等边三角形的性质
    - 等边三角形的判定
  - 直角三角形
    - 直角三角形的性质
    - 直角三角形的判定
    - 两个直角三角形全等的判定（HL）
    - 勾股定理
    - 勾股定理的逆定理

见《学练优》本章热点专练