八年级数学·上　　新课标［冀教］

第十七章　特殊三角形

17.2　直角三角形

学习新知

检测反馈

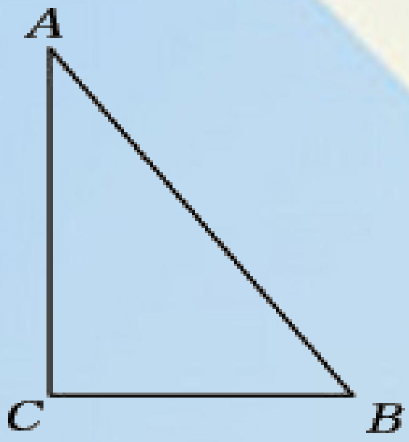
思考:

什么样的三角形是直角三角形?

有一个角是直角的三角形是直角三角形.

那么这个特殊的三角形有哪些性质呢?我们又怎样来判定一个三角形是直角三角形呢?

(1)观察图中的三角形,$\angle C=90°$,从$\angle A+\angle B$的度数,能说明什么?为什么?



直角三角形的两个锐角互余.(性质定理1)

(2)想一想:如果一个三角形的两个角互余,那么这个三角形是直角三角形吗?

如果一个三角形的两个角互余,那么这个三角形是直角三角形.(判定定理)

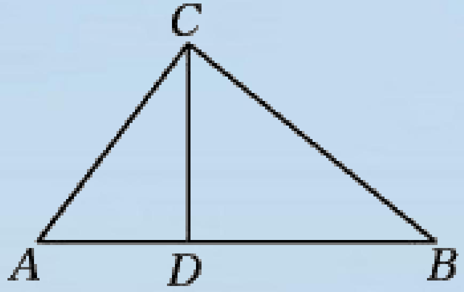
(3)讨论:直角三角形的性质定理1和判定定理是什么关系?

对应练习

(1)在直角三角形中,有一个锐角为52°,那么另一个锐角度数为__38°__.

(2)在Rt△ABC中,∠C=90°,∠A-∠B=30°,那么∠A=__60°__,∠B=__30°__.

(3)如图所示,在△ABC中,∠ACB=90°,CD是斜边AB上的高,与∠B互余的角有__∠A, ∠DCB__;
与∠A互余的角有__∠ACD, ∠B__;
与∠A相等的角有__∠DCB__;
与∠B相等的角有__∠ACD__.



想一想:

如果在练习(3)中添加$\angle A=45°$的条件,那么各个锐角是多少度?各条线段之间有什么数量关系?猜一猜,量一量:直角三角形斜边上的中线等于斜边一半吗?

(1)在一张半透明的纸上画出一个直角三角形,按照教材第147页“观察与思考”进行操作.

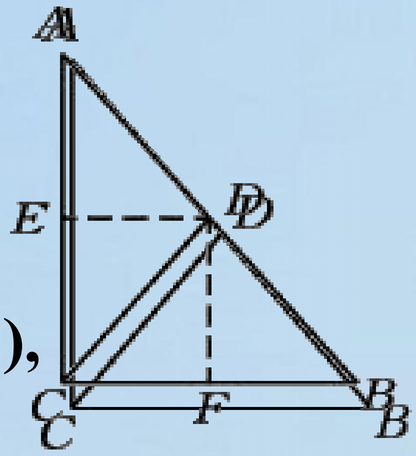
(2)思考:$\angle ECF$与$\angle B$有什么关系?线段EC与线段EB有什么关系?

(3)由发现的上述关系以及$\angle A+\angle B=\angle ACB$, $\angle ACE+\angle ECF=\angle ACB$.你能判断$\angle ACE$与$\angle A$的大小关系吗?线段$AE$与线段$CE$呢?从而你发现了什么结论?将你的结论与大家交流.

$CE=AE=EB$,即CE是AB的中线,且$2CE=AB$.

已知:如图所示,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,CD是斜边AB上的中线.求证:$CD=\frac{1}{2}AB$.

证明:如图所示,过点D作$DE\parallel BC$,交AC于点E,作$DF\parallel AC$,交BC于点F.



在△AED和△DFB中

$\angle A=\angle FDB$,

$AD=BD$,

$\angle ADE=\angle B$,

∴△AED≌△DFB(ASA),

∴$AE=DF$,$ED=FB$(全等三角形的对应边相等),

同理可证△CDE≌△DCF.

从而$ED=FC$,$EC=FD$(全等三角形的对应边相等).

∴$AE=CE$,$FC=FB$(等量代换).

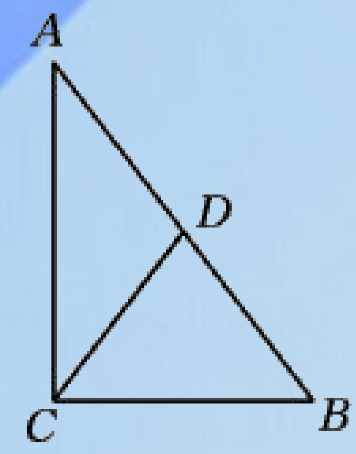
又∵$DE\perp AC$,$DF\perp BC$(两直线平行,同位角相等),

∴DE为AC的垂直平分线,DF为BC的垂直平分线.

∴$AD=CD=BD$(线段垂直平分线的性质定理),

∴$CD=\frac{1}{2}AB$.

归纳:



性质定理2:

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

课堂小结

1.直角三角形的性质定理1

根据三角形内角和等于180°,我们可以得到直角三角形中的两个锐角的和是90°,即直角三角形的两个锐角互余.这样,在直角三角形中,如果已知一个锐角的度数,就可以求出另一锐角的度数.

2.直角三角形的判定定理

如果一个三角形中的两个角互余,那么这个三角形是直角三角形.

要判定一个三角形是直角三角形,只要能证明出一个三角形中有两个角的和是90°,那么这个三角形就是直角三角形.

课堂小结

3. 直角三角形的性质定理2

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 注意:这一性质成立的条件是在直角三角形中, 并且是斜边上的中线, 直角边上的中线不具备这个性质. 在解决直角三角形的问题时, 如果涉及到斜边上的中点, 那么就要联想到这一性质.

4.含有30° 角的直角三角形的性质

在直角三角形中,30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

检测反馈

1.在$\triangle ABC$中,满足下列条件:

①$\angle A=60°$,$\angle C=30°$;②$\angle A+\angle B=\angle C$;

③$\angle A$∶$\angle B$∶$\angle C=3$∶4∶5;④$\angle A=90°-\angle C$.

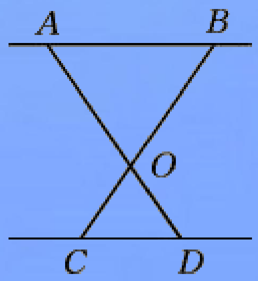
其中能确定$\triangle ABC$是直角三角形的有　　(C　)

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

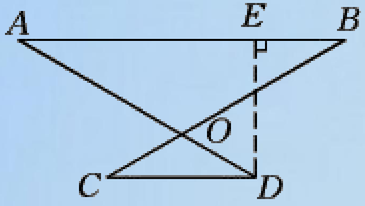
解析:①$\angle A=60°$,$\angle C=30°$时,$\angle B=180°-60°-30°=90°$是直角三角形;②$\angle A+\angle B=\angle C$时,$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle C=180°$,$\therefore \angle C=90°$,是直角三角形;③$\angle A$∶$\angle B$∶$\angle C=3$∶4∶5时,$\angle C<90°$,是锐角三角形;④$\angle A=90°-\angle C$时,$\angle A+\angle C=90°$,$\angle B=90°$,是直角三角形.综上所述,是直角三角形的有①②④,共3个.故选C.

2.设计一张折叠型方桌如图(1)所示,$AO=BO=50$ cm,$CO=DO=30$ cm,将桌子放平后,要使AB距离地面的高为40 cm,则两条桌腿需要叉开的角度($\angle AOB$)应为(C)

A.60°　　B.90°　　C.120°　　D.150°



(1)



(2)

解析:作$DE\perp AB$于E,如图(2)所示.

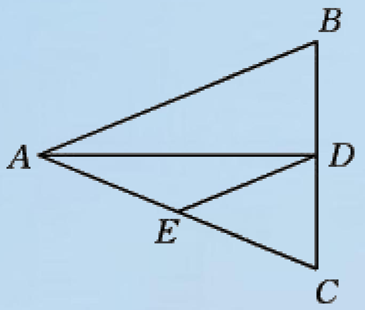
$\because AD=50+30=80$(cm),$DE=40$ cm,$\therefore \angle A=30°$,

$\because AO=BO$,$\therefore \angle B=\angle A=30°$,

$\therefore \angle AOB=180°-30°-30°=120°$.故选C.

3.如图所示, $\triangle ABC$中,$AB=AC=10$,$BC=8$,AD平分$\angle BAC$交BC于点D,点E为AC的中点,连接DE,则$\triangle CDE$的周长为　(C)

A.20　　B.12　　C.14　　D.13



解析:$\because AB=AC$,AD平分$\angle BAC$,$BC=8$,

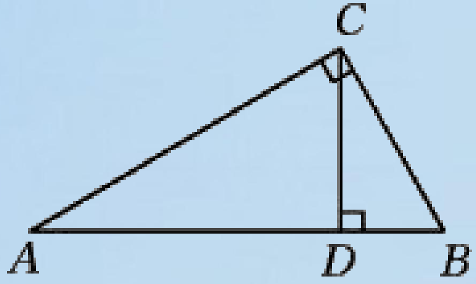
$\therefore AD\perp BC$,$CD=BD=\frac{1}{2}BC=4$,$\because$点E为AC的中点,

$\therefore DE=CE=\frac{1}{4}AC=5$,$\therefore \triangle CDE$的周长

$=CD+DE+CE=4+5+5=14$.故选C.

4.如图所示, $\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,CD是高,$\angle A=30°$ $BD=5$,则AB的长为(A)

A.20　B.15　C.10　D.18



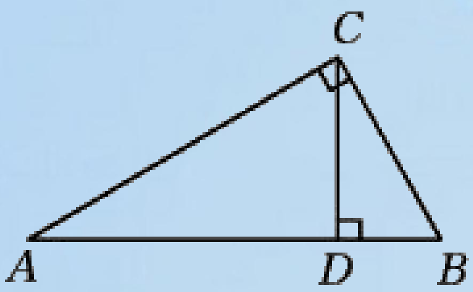
解析:$\because \angle ACB=90°$,CD是高,

$\therefore \angle A+\angle ACD=\angle ACD+\angle BCD=90°$,$\therefore \angle BCD=\angle A=30°$,

在$Rt\triangle BCD$中,$BC=2BD=2\times5=10$,在$Rt\triangle ABC$中,

$AB=2BC=2\times10=20$.故选A.

5.如图所示,在直角三角形ABC中,$\angle ACB=90°$,D是AB上一点,且$\angle ACD=\angle B$.求证$CD\perp AB$.

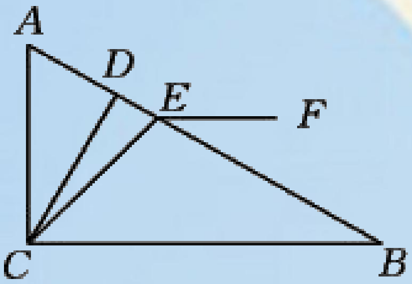


解析:根据$\angle ACB=90°$,得出$\angle A+\angle B=90°$根据$\angle ACD=\angle B$,得出$\angle A+\angle ACD=90°$,再根据两锐角互余的三角形是直角三角形即可得出答案.

证明:$\because \angle ACB=90°$,$\therefore \angle A+\angle B=90°$,
$\because \angle ACD=\angle B$,$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$,
$\therefore \triangle ACD$是直角三角形,
$\angle ADC=90°$,$\therefore CD\perp AB$.

6.在直角三角形ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,$CD\perp AB$于D,CE是$\angle ACB$的平分线. (1)求$\angle DCE$的度数.

解析:由图知$\angle DCE=\angle DCB-\angle ECB$,由$\angle B=30°$,$CD\perp AB$于$D$,利用直角三角形的性质定理,求出$\angle DCB$的度数,再由角平分线定义得$\angle ECB=\angle ACB$,则$\angle DCE$的度数可求;



解:$\because \angle B=30°$,$CD\perp AB$于D,

$\therefore \angle DCB=90°-\angle B=60°$.

$\because CE$平分$\angle ACB$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ECB=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$,

$\therefore \angle DCE=\angle DCB-\angle ECB=60°-45°=15°$.

(2)若$\angle CEF=135°$,求证$EF\parallel BC$.

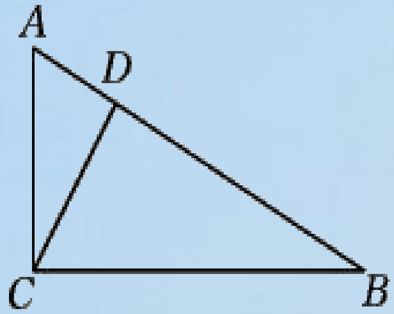
解析: 根据$\angle CEF+\angle ECB=180°$,由同旁内角互补,两直线平行可以证明$EF\parallel BC$.

证明:$\because \angle CEF=135°$,$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$,

$\therefore \angle CEF+\angle ECB=180°$,$\therefore EF\parallel BC$.

7.如图所示,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,$CD\perp AB$于D.求证$AD=\frac{1}{4}AB$.

解析:在直角三角形ABC中,由$\angle B=30°$,利用在直角三角形中,30°角所对的直角边等于斜边的一半,得到AC等于AB的一半,由CD垂直于AB,得到△ACD和△BCD都为直角三角形,由$\angle B$为30°,求出$\angle ACD$为30°,再利用在直角三角形中,30°角所对的直角边等于斜边的一半得到AD为AC的一半, 等量代换即可得证.



证明:在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB$,

$\because CD\perp AB$,$\therefore \angle CDB=90°$,

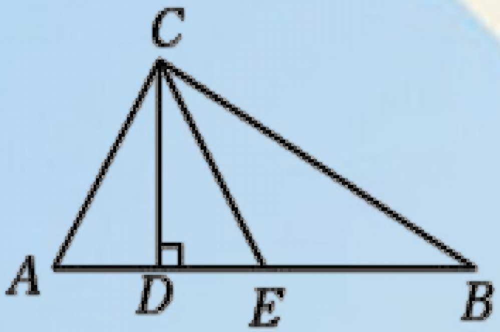
在Rt△BCD中,$\angle B=30°$,$\therefore \angle DCB=60°$,

$\therefore \angle ACD=\angle ACB-\angle DCB=90°-60°=30°$,

在Rt△ACD中,$AD=\frac{1}{2}AC$,$\therefore AD=\frac{1}{4}AB$.

8.如图所示,已知在△ ABC中,$\angle ACB=90°$,CD为高,且CD,CE三等分$\angle ACB$. (1)求$\angle B$的度数;

解析:利用直角三角形BCD的两个锐角互余进行解答.



解:(1)∵在△ ABC中,$\angle ACB=90°$,CD,CE三等分$\angle ACB$,∴$\angle ACD=\angle DCE=\angle BCE=30°$,

∴$\angle BCD=60°$,又∵CD为高,

∴$\angle B=90°-60°=30°$.

(2)求证CE是AB边上的中线,且$CE=\frac{1}{2}AB$.

解析:利用已知条件和(1)中的结论可以得到△ ACE是等边三角形和△ BCE为等腰三角形,利用等腰三角形的性质证得结论.

证明:(2)由(1)知$\angle B=\angle BCE=30°$,∴$CE=BE$,$AC=\frac{1}{2}AB$.

∵$\angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,∴$\angle A=60°$,

由(1)知$\angle ACD=\angle DCE=30°$,∴$\angle ACE=\angle A=60°$,

∴ △ ACE是等边三角形,∴$AC=AE=EC=\frac{1}{2}AB$,

∴$AE=BE$,即点E是AB的中点.

∴CE是AB边上的中线,且$CE=\frac{1}{2}AB$.