

第二十二章 四边形

22.4 矩形

第2课时 矩形的判定

导入新课

讲授新课

当堂练习

课堂小结



学习目标

1. 理解并掌握矩形的判定方法. (重点)
2. 能应用矩形判定解决简单的证明题和计算题. (难点)

导入新课

问题引入

假如你是做窗框的师傅，你有什么方法检验你做的这个窗框是矩形？

（直角尺等）

矩形的定义：

有一个角是直角的平行四边形是矩形。

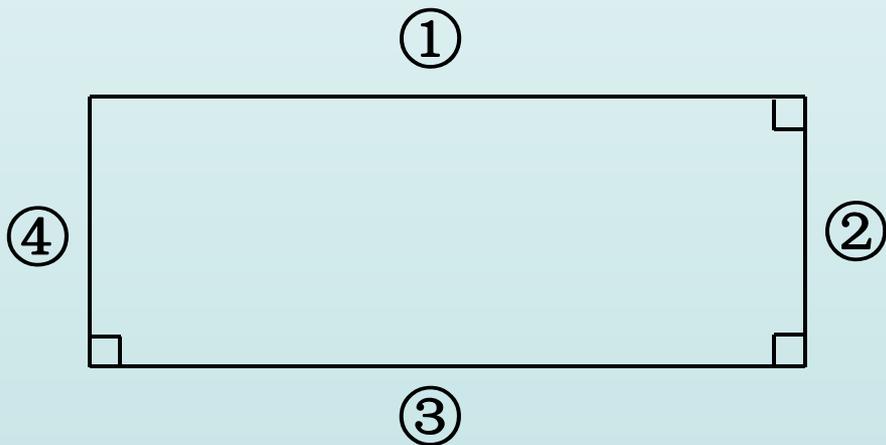


思考

你还有其它的方法吗？

矩形的判定

活动1: 李芳同学通过画“边一直角、边一直角、边一直角、边”这样四步画出一个四边形.



问题1: 李芳觉得按照以上步骤可以得到一个矩形. 你认为她的判断正确吗? 如果正确, 你能证明吗?

已知：如图,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle B=\angle C=90^\circ$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

证明： $\because \angle A=\angle B=\angle C=90^\circ$,

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$, $\angle B+\angle C=180^\circ$.

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD$.

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形.



有三个角是直角的四边形是矩形.

典例精析

例1. 已知：如图， $\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于E、F、G、H，

求证：四边形EFGH为矩形.

证明：在 $\square ABCD$ 中， $AD \parallel BC$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$$

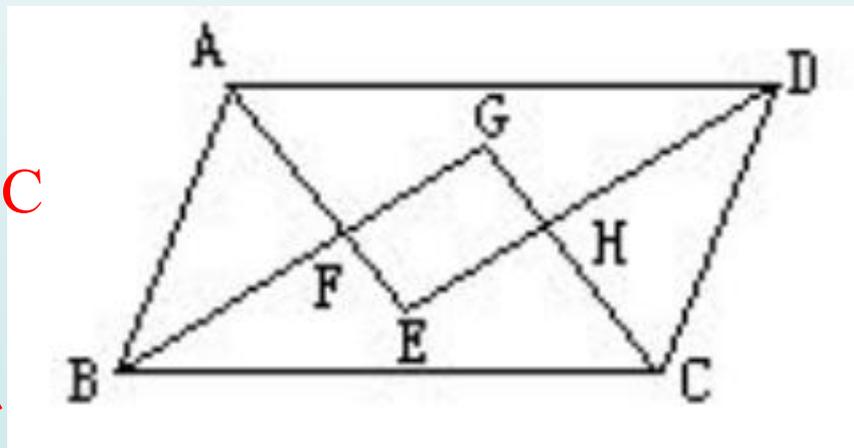
$\therefore AE$ 与 BG 分别为 $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 的角平分线

$$\therefore \angle BAE + \angle ABF = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ$$

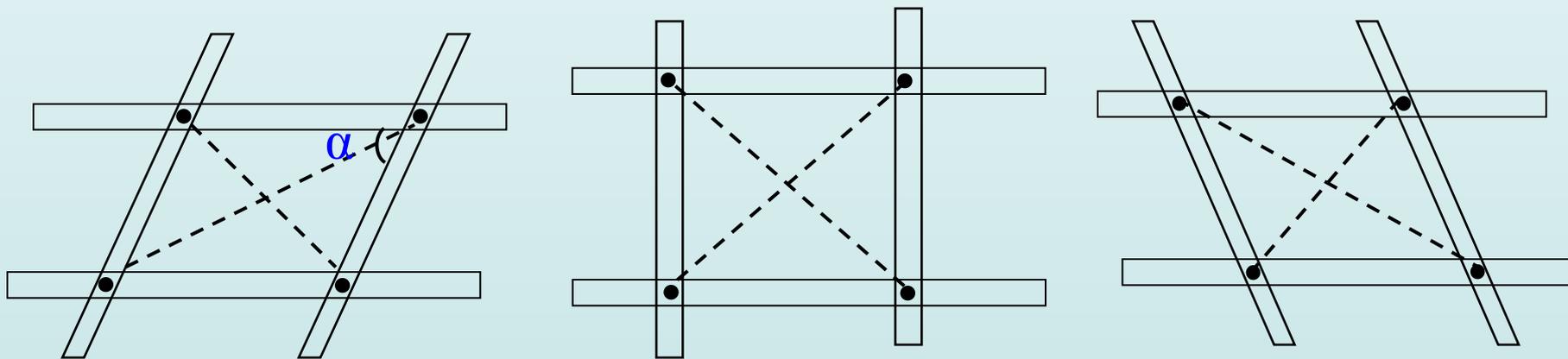
$$\therefore \angle AFB = 90^\circ, \therefore \angle GFE = 90^\circ$$

同理可证 $\angle AED = \angle EHG = 90^\circ$

\therefore 四边形EFGH是矩形.



活动2: 利用一个活动的平行四边形教具演示, 拉动一对不相邻的顶点时, 注意观察两条对角线的长度.



问题2: 我们会看到对角线会随着 $\angle \alpha$ 变化而变化, 当两条对角线长度相等时, 平行四边形有什么特征?

已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， AC ， DB 是它的两条对角线， $AC=DB$ 。

求证： $\square ABCD$ 是矩形。

证明： $\because AB = DC, BC = CB, AC = DB,$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB,$

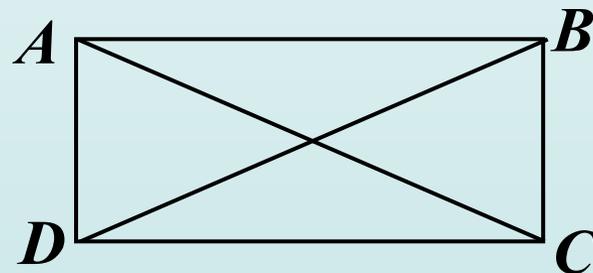
$\therefore \angle ABC = \angle DCB.$

$\because AB \parallel CD,$

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ,$

$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore \square ABCD$ 是矩形（矩形的定义）。

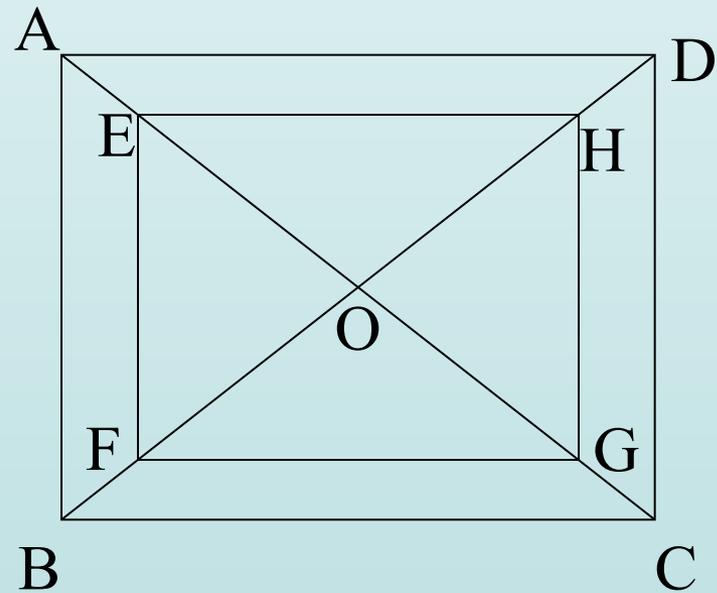


定理

对角线相等的平行四边形是矩形。

例2.已知：如图,矩形ABCD的对角线AC、BD相交于点O, E、F、G、H分别是AO、BO、CO、DO上的一点,且 $AE=BF=CG=DH$.

求证:四边形EFGH是矩形.



证明： \because 四边形ABCD是矩形

$\therefore AC=BD$ (矩形的对角线相等)

$AO=BO=CO=DO$ (矩形的对角线互相平分)

$\therefore AE=BF=CG=DH$

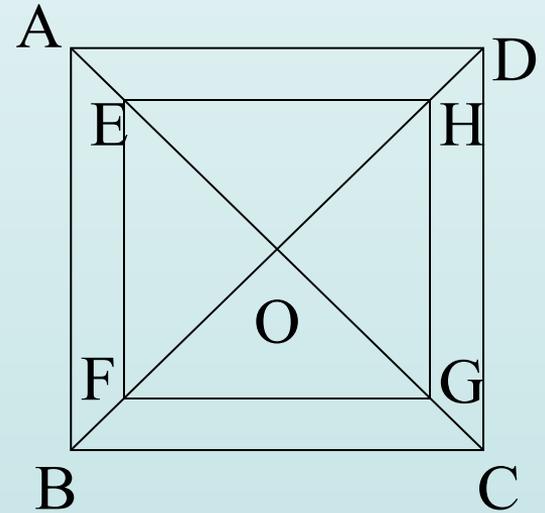
$\therefore OE=OF=OG=OH$

\therefore 四边形EFGH是平行四边形

$\therefore EO+OG=FO+OH$

即 $EG=FH$

\therefore 四边形EFGH是矩形.



若变为：E、F、G、H
分别是AO、BO、CO、
DO的中点，你会吗？

做一做

已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于 O ， $\triangle AOB$ 是等边三角形， $AB = 4\text{cm}$ ，求这个平行四边形的面积。

解： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AC = 2OA, \quad BD = 2OB$$

$$\because \triangle AOB \text{ 是等边三角形, } \therefore OA = OB$$

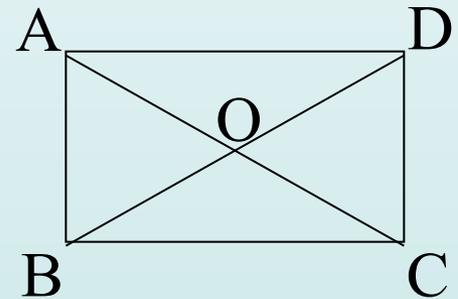
$$\therefore AC = BD$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 是矩形, } \therefore \angle ABC = 90^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because AB = 4\text{cm}$ ， $AC = 2AO = 8\text{cm}$

$$\therefore BC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot BC = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

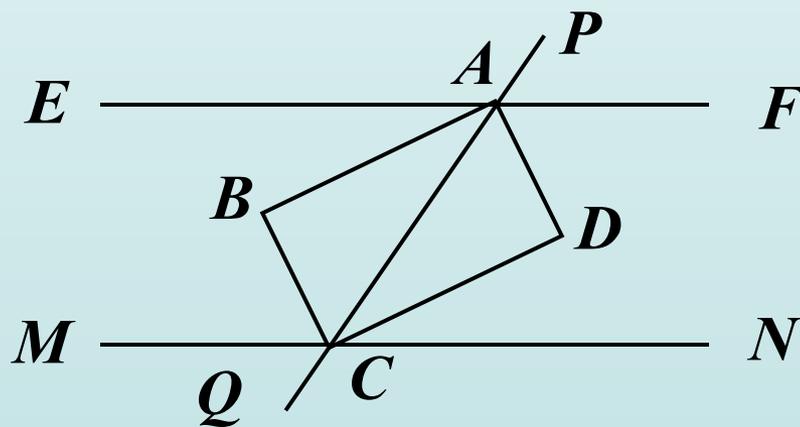


当堂练习

1. 下列各句判定矩形的说法是否正确？

- (1) 对角线相等的四边形是矩形； ×
- (2) 对角线互相平分且相等的四边形是矩形； ✓
- (3) 有一个角是直角的四边形是矩形； ×
- (4) 有三个角都相等的四边形是矩形； ×
- (5) 有三个角是直角的四边形是矩形； ✓
- (6) 四个角都相等的四边形是矩形； ✓
- (7) 对角线相等，且有一个角是直角的四边形是矩形； ×
- (8) 一组对角互补的平行四边形是矩形； ✓

2.如图,直线 $EF \parallel MN$, PQ 交 EF 、 MN 于 A 、 C 两点, AB 、 CB 、 CD 、 AD 分别是 $\angle EAC$ 、 $\angle MCA$ 、 $\angle ACN$ 、 $\angle CAF$ 的角平分线, 则四边形 $ABCD$ 是 (**C**)



- A. 菱形 B. 平行四边形 C. 矩形 D. 不能确定

3.如图 ABCD中, $\angle 1 = \angle 2$ 中.此时四边形ABCD是矩形吗?
为什么?

解: 四边形ABCD是矩形.理由如下:

\because 四边形ABCD是平行四边形

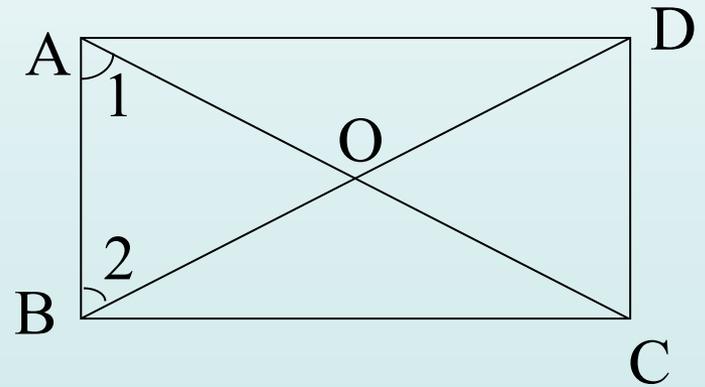
$\therefore AO = CO, DO = BO.$

又 $\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore AO = BO$

$\therefore AC = BD$

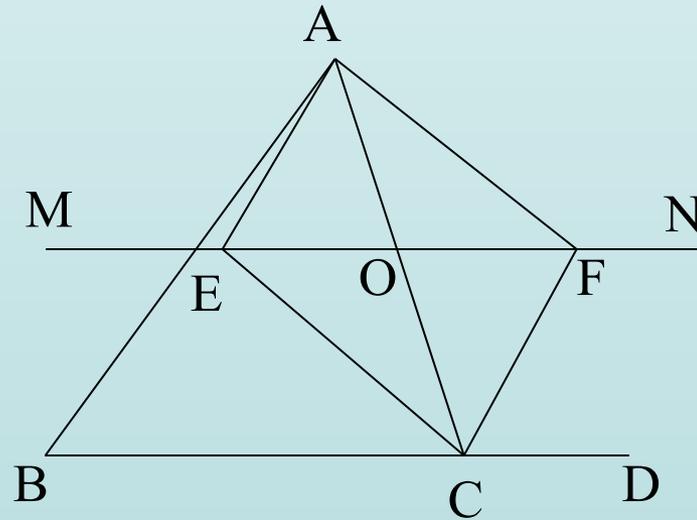
\therefore 四边形ABCD是矩形.



4. $\triangle ABC$ 中，点O是AC边上一动点，过O点作直线 $MN \parallel BC$ ，设MN交 $\angle BCA$ 的平分线于点E，交 $\angle BCA$ 的外角平分线于点F，

(1) 试说明 $EO=OF$.

(2) 当点O运动到何处时，四边形AECF是矩形？并说明你的理由.



解：（1） $\because MN \parallel BC$,

$\therefore \angle OEC = \angle BCE$, $\angle OFC = \angle GCF$,

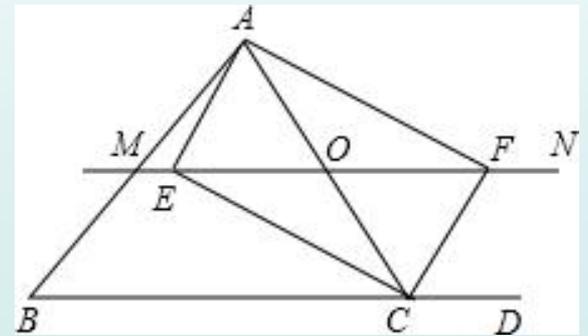
又 $\because CE$ 平分 $\angle BCO$, CF 平分 $\angle GCO$,

$\therefore \angle OCE = \angle BCE$, $\angle OCF = \angle GCF$,

$\therefore \angle OCE = \angle OEC$, $\angle OCF = \angle OFC$,

$\therefore EO = CO$, $FO = CO$,

$\therefore EO = FO$;



(2) 当点O运动到AC的中点时，四边形AECF是矩形.

理由如下：

∵当点O运动到AC的中点时， $AO=CO$ ，

又∵ $EO=FO$ ，

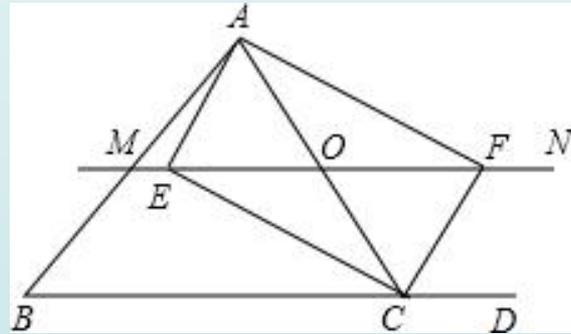
∴四边形AECF是平行四边形，

∵ $FO=CO$ ，

∴ $AO=CO=EO=FO$ ，

∴ $AO+CO=EO+FO$ ，即 $AC=EF$ ，

∴四边形AECF是矩形.



定义 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

矩形的判定

定理

定理1: 有三个角是直角的四边形是矩形.

定理2: 对角线相等的平行四边形是矩形.

运用定理进行计算和证明.

见《学练优》本课时练习