

# 第二十二章 四边形

## 22.5 菱形

### 第2课时 菱形的判定

导入新课

讲授新课

当堂练习

课堂小结



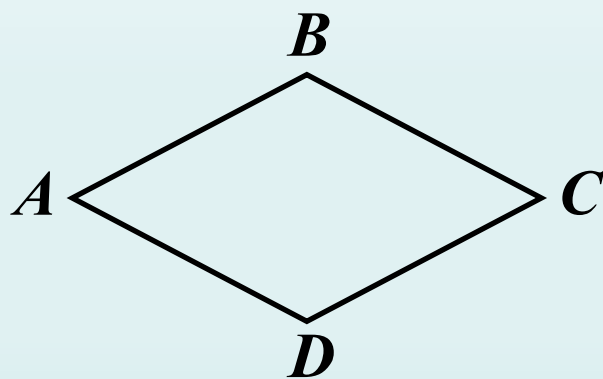
## 学习目标

1. 理解并掌握菱形的两个判定方法. (重点)
2. 会用这些菱形的判定方法进行有关的证明和计算. (难点)

## 导入新课

### 复习引入

问题：什么是菱形？菱形有哪些性质？



思考：通过菱形的定义我们可以确定四边形是否为菱形，那么还有其他的判定方法吗？

菱形的定义：有一组邻边相等的平行四边形。

菱形的性质：1. 轴对称图形。

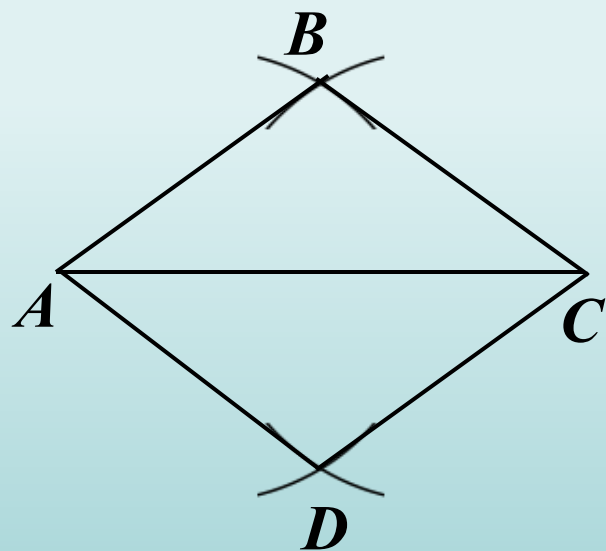
2. 四边相等。

3. 对角线互相垂直平分。

# 菱形的判定定理1

## 合作探究

已知线段 $AC$ ,你能用尺规作图的方法作一个菱形 $ABCD$ ,使 $AC$ 为菱形的一条对角线吗?



小刚：分别以 $A$ 、 $C$ 为圆心,以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧,两条弧分别相交于点 $B$ 、 $D$ ,依次连接 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 四点.

想一想：1.你是怎么做的,你认为小刚的作法对吗?

2.怎么验证四边形 $ABCD$ 是菱形?提示： $AB = BC = CD = AD$

## 定理证明

已知：如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB=BC=CD=AD$ .

求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

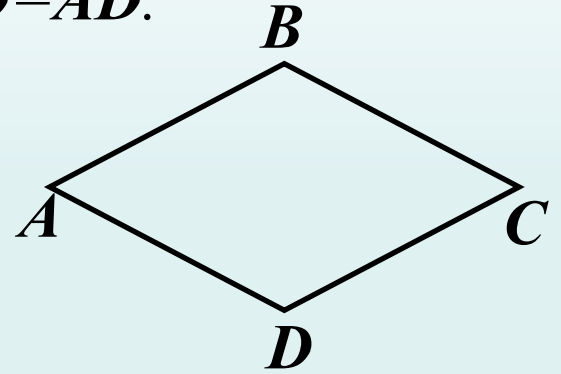
证明： $\because AB=BC=CD=AD$ ;

$\therefore AB=CD, BC=AD$ .

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $\because AB=BC$ ,

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是菱形.



定理

四条边相等的四边形是菱形.

## 练一练

下列命题中正确的是（ C ）

A. 一组邻边相等的四边形是菱形

B. 三条边相等的四边形是菱形

C. 四条边相等的四边形是菱形

D. 四个角相等的四边形是菱形

## 典例精析

例1.如图，AD是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \parallel AC$ 交AB于点E， $DF \parallel AB$ 交AC于点F.试问四边形AEDF是菱形吗？说明你的理由.

解：四边形AEDF是菱形.

理由如下： $\because DE \parallel AC, DF \parallel AB$

$\therefore$  四边形AEDF是平行四边形

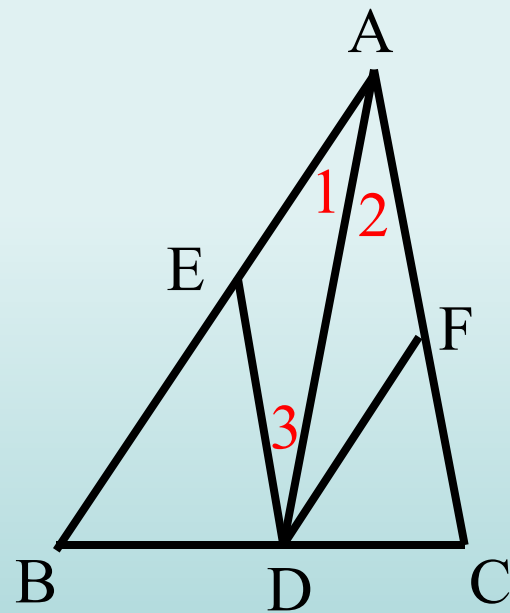
$\therefore \angle 2 = \angle 3$

$\because$  AD是 $\triangle ABC$ 的角平分线

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle 1 = \angle 3, \therefore AE = DE$

$\therefore$  四边形AEDF是菱形



**例2:** 已知: 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AD$ 是角平分线,点 $E$ 、 $F$ 分别在 $AB$ 、 $AD$ 上,且 $AE=AC$ , $EF=ED$ .

求证: 四边形 $CDEF$ 是菱形.

证明:  $\because \angle 1 = \angle 2$ ,

又 $\because AE=AC$ ,

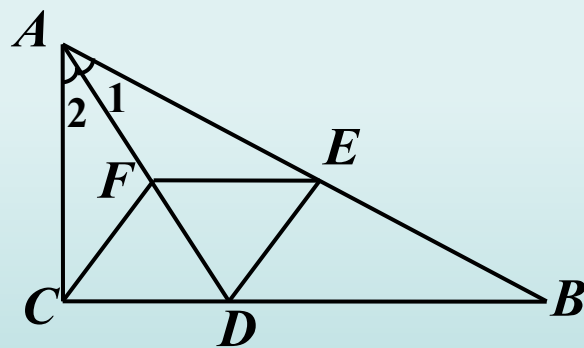
$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED$  (SAS).

同理 $\triangle ACF \cong \triangle AEF$  (SAS).

$\therefore CD=ED, CF=EF$ .

又 $\because EF=ED$ ,

$\therefore$  四边形 $CDEF$ 是菱形 (四边相等的四边形是菱形).

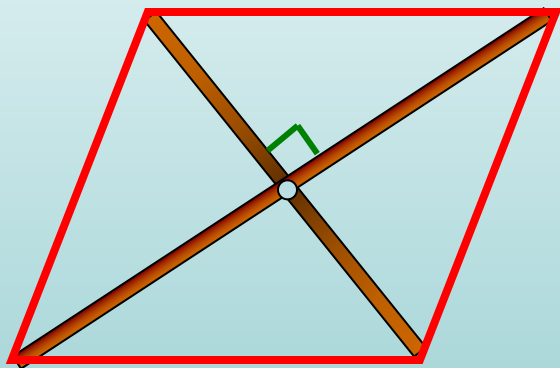




## 菱形的判定定理2

### 合作探究

用一长一短两根细木条,在它们的中点处固定一个小钉,做成一个可以转动的十字,四周围上一根橡皮筋,做成一个四边形.转动木条,这个四边形什么时候变成菱形?



猜想：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

## 定理证明

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$ ， $AC \perp BD$ 。

求证： $\square ABCD$ 是菱形。

证明： $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

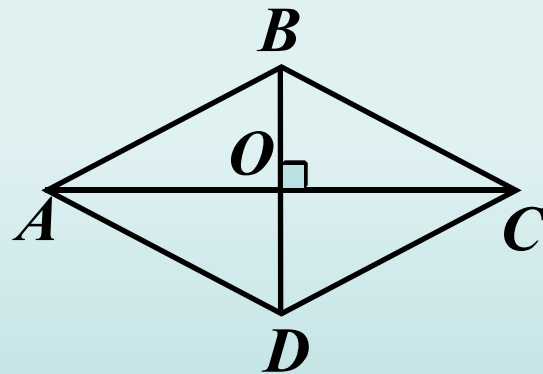
$$\therefore OA = OC.$$

又 $\because AC \perp BD$ ,

$\therefore BD$ 是线段 $AC$ 的垂直平分线。

$$\therefore BA = BC.$$

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是菱形（菱形的定义）。



**定理**

对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

## 练一练

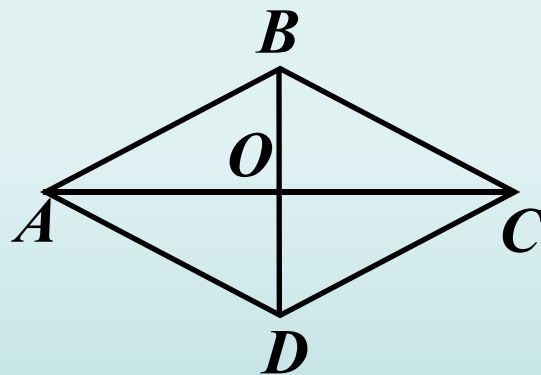
下列条件中,不能判定四边形 $ABCD$ 为菱形的是 ( **C** )

A.  $AC$ 与 $BD$ 互相平分,  $AC \perp BD$

B.  $AB=BC=CD=DA$

C.  $AB=BC, AD=CD, AC \perp BD$

D.  $AB=CD, AD=BC, AC \perp BD$



**方法**

1. 直接根据“四边相等”判定四边形是菱形.
2. 先判定四边形是平行四边形, 再判定四边形是菱形;

**例3.**如图,已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 的垂直平分线与边 $AD$ 、 $BC$ 分别交于点 $E$ 、 $F$ ,求证: 四边形 $AFCE$ 是菱形.

**证明:**  $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AE \parallel FC.$

$\therefore \angle 1 = \angle 2.$

$\because EF$ 垂直平分 $AC$ ,

$\therefore AO = OC.$

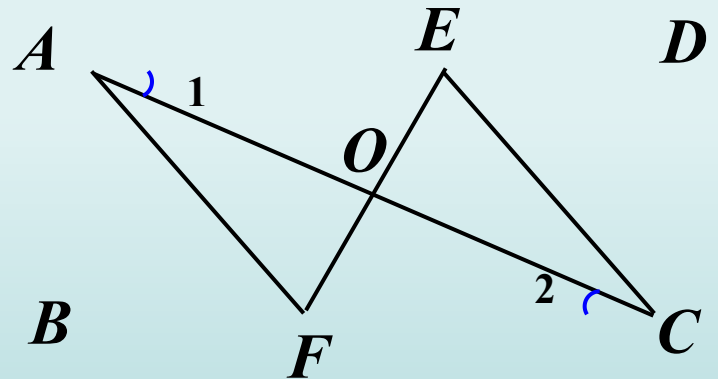
又  $\angle AOE = \angle COF$ ,

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF, \therefore EO = FO.$

$\therefore$  四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

又  $\because EF \perp AC$

$\therefore$  四边形 $AFCE$ 是菱形.



例4.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AC = 6$ ， $BD = 8$ ， $AD = 5$ . 求 $AB$ 的长.

解： $\because$  四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 3, OD = \frac{1}{2}BD = 4.$$

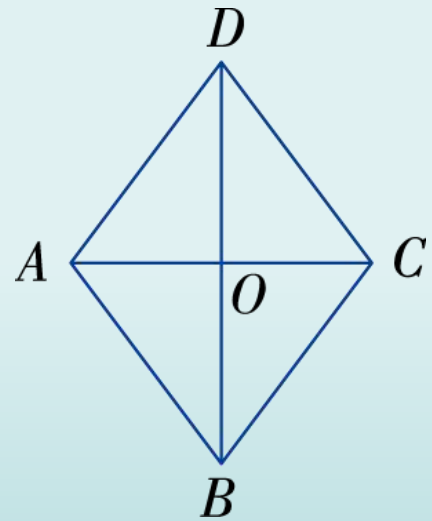
又 $\because AD=5$ ，满足 $AD^2 = OA^2 + OD^2$

$\therefore \triangle DAO$ 是直角三角形.

$\therefore \angle DOA = 90^\circ$ ，即 $DB \perp AC$ .

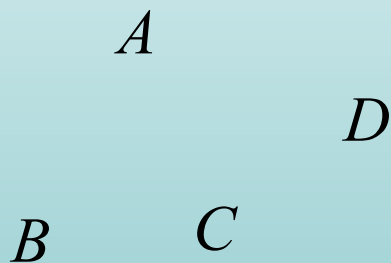
$\therefore$  平行四边形 $ABCD$ 是菱形. (对角线互相垂直的平行四边形是菱形)

$$\therefore AB = AD = 5.$$

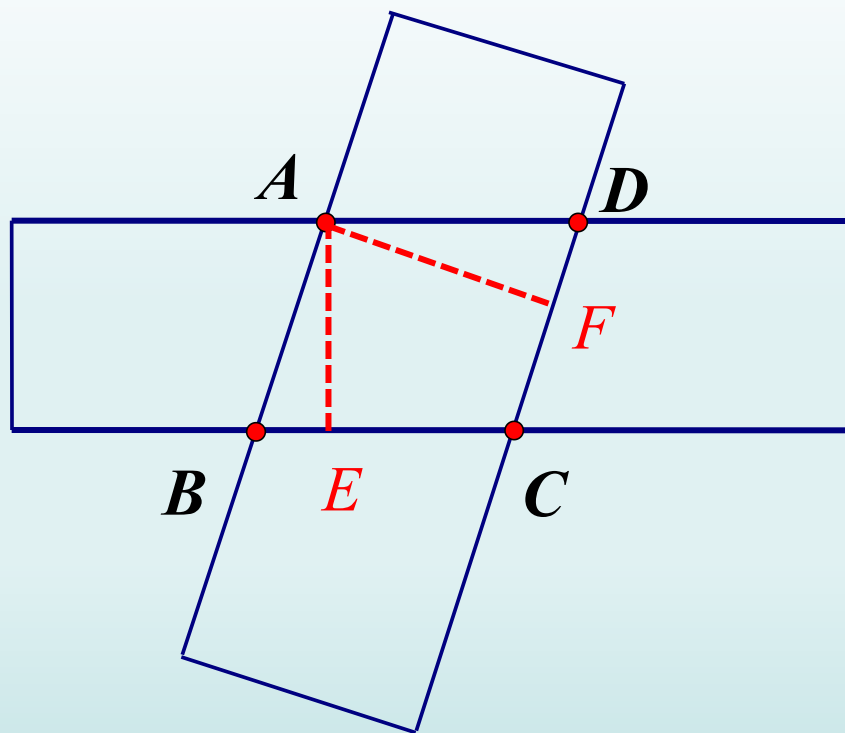


## 请你动脑筋

把两张等宽的纸条交叉重叠在一起，你能判断重叠部分 $ABCD$ 的形状吗？



四边形 $ABCD$ 是菱形，  
为什么？



请补充完整的  
证明过程


**分析：**易知四边形ABCD是**平行四边形**，只需证一组邻边相等或对角线互相垂直即可。


由题意可知BC边上的高和CD边上的高相等，


然后通过证 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，即得 **$AB=AD$** 。


## 当堂练习

### 1. 判断下列说法是否正确

(1) 对角线互相垂直的四边形是菱形； 

(2) 对角线互相垂直且平分的四边形是菱形； 

(3) 对角线互相垂直，且有一组邻边相等  
的四边形是菱形； 

(4) 两条邻边相等，且一条对角线平分一  
组对角的四边形是菱形。 



2.如图，将 $\triangle ABC$ 沿BC方向平移得到 $\triangle DCE$ ，连接AD，下列条件能够判定四边形ACED为菱形的是（ **B** ）

A.  $AB=BC$     B.  $AC=BC$     C.  $\angle B=60^\circ$

解析： $\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿BC方向平移得到

$\triangle DCE$ ,

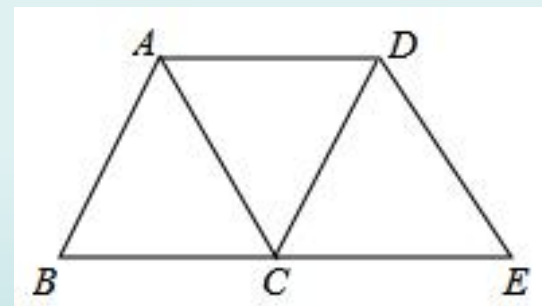
$\therefore AB \parallel CD$ ,

$\therefore$ 四边形ABCD为平行四边形，

当 $AC=BC$ 时，

平行四边形ACED是菱形。

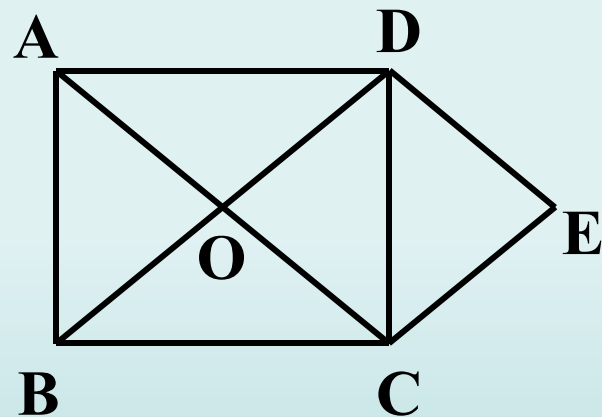
故选：B。



3.如图，矩形ABCD的对角线相交于点O， $DE \parallel AC$ ,  $CE \parallel BD$ .

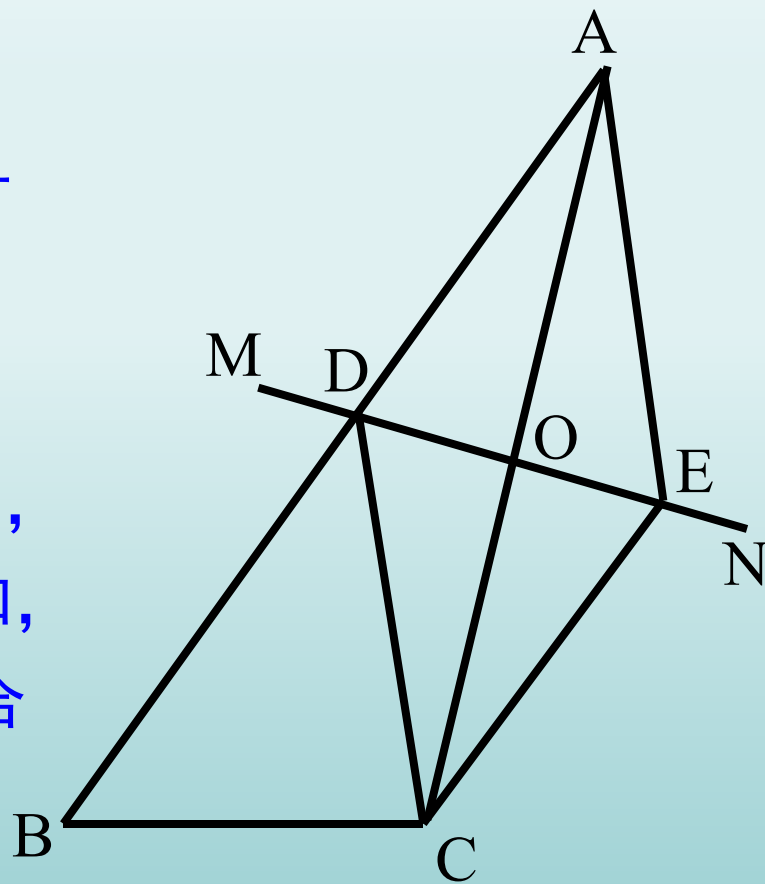
求证：四边形OCED是菱形

证明： $\because DE \parallel AC$ ,  $CE \parallel BD$ ,  
 $\therefore$  四边形OCED是平行四边形,  
 $\because$  四边形ABCD是矩形,  
 $\therefore OC=OD$ ,  
 $\therefore$  四边形OCED是菱形.



4.如图， $\triangle ABC$ 中， $AC$ 的垂直平分线 $MN$ 交 $AB$ 于点 $D$ ，交 $AC$ 于点 $O$ ， $CE \parallel AB$ 交 $MN$ 于点 $E$ ，连接 $AE$ 、 $CD$ 。  
求证：四边形 $ADCE$ 是菱形

【分析】根据垂直平分线的性质可得 $AE=CE$ ， $AD=CD$ ， $OA=OC$ ， $\angle AOD=\angle EOC=90^\circ$ 。再结合 $CE \parallel AB$ ，可证得 $\triangle ADO \cong \triangle CEO$ ，从而根据由一组对边平行且相等知，四边形 $ADCE$ 是平行四边形。再结合 $\angle AOD=90^\circ$ 可证得四边形 $ADCE$ 为菱形。



证明：  $\because$  MN是AC的垂直平分线，

$\therefore$  AE=CE, AD=CD, OA=OC,

$\angle AOD = \angle EOC = 90^\circ$  .

$\because$  CE // AB,

$\therefore \angle DAO = \angle ECO$ ,

$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CEO$  (ASA) .

$\therefore$  AD=CE, OD=OE,

$\because$  OD=OE, OA=OC,  $\therefore$  四边形ADCE是平行四边形

又  $\because \angle AOD = 90^\circ$  ,  $\therefore$  四边形ADCE是菱形.

定义 有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

定理1：四边相等的四边形是菱形.

### 菱形的判定

定理

定理2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

运用定理进行计算和证明.

# 课后作业