第二十二章 四边形

22.6 正方形

学习目标

1. 了解正方形的定义及其与平行四边形的关系.

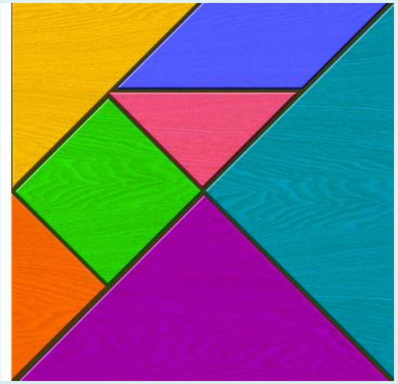
2. 探索并掌握正方形的性质，应用正方形的性质解决相关问题. （重点）

3. 掌握正方形的判定方法，会运用正方形的判定条件进行有关的证明和计算 . （重点）

导入新课

图片引入

观察这些图片，你有什么发现？这些四边形有什么共同特征？



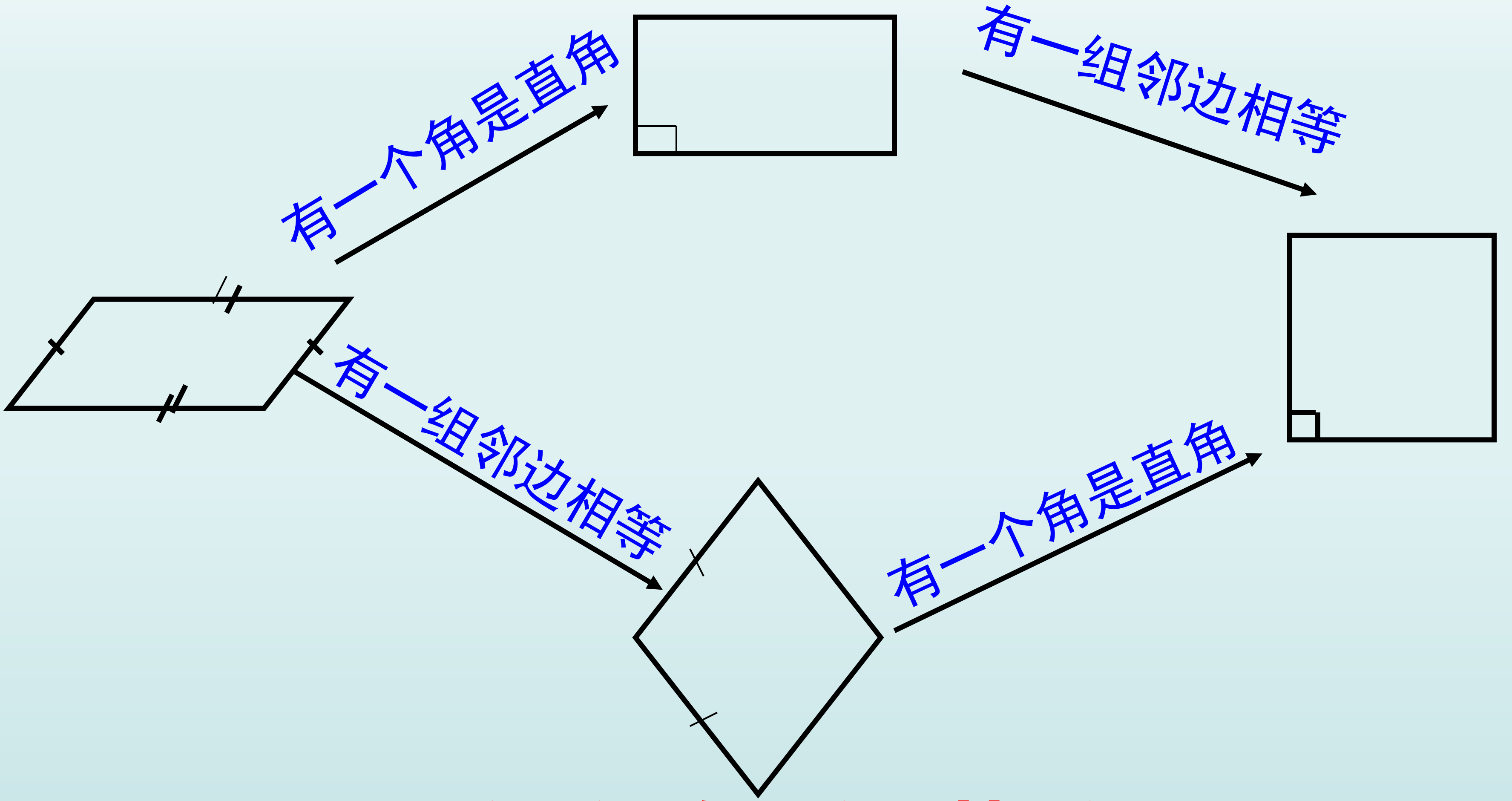
各边相等，
各角相等
……

一 正方形的性质

知识要点

定义：有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

思考：通过正方形的定义，你能找出正方形与平行四边形、矩形以及菱形之间的关系吗？



正方形、矩形、菱形及平行四边形四者之间的关系

正
方
形

矩形 菱形

平行四边形

归纳 正方形是特殊的平行四边形，也是特殊的矩形，也是特殊的菱形．所以平行四边形、矩形、菱形有的性质，正方形都有．

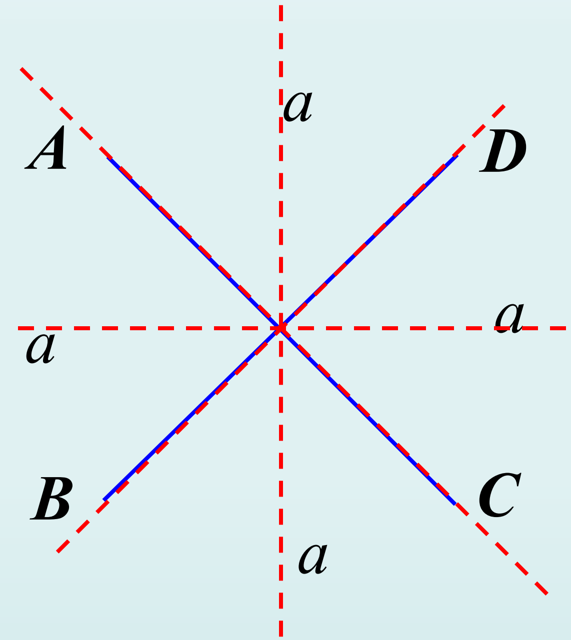
填一填：

角：四个角都是直角.

边：四条边相等.

对角线：对角线相等且互相垂直平分.

对称性：轴对称图形（4条对称轴）.



归纳总结

相互平分

对角线

边

对边平行且相等

相等

对角线

正方形

边

四边相等

相互垂直且
平分对角

对角线

角

四个角相等都是90°

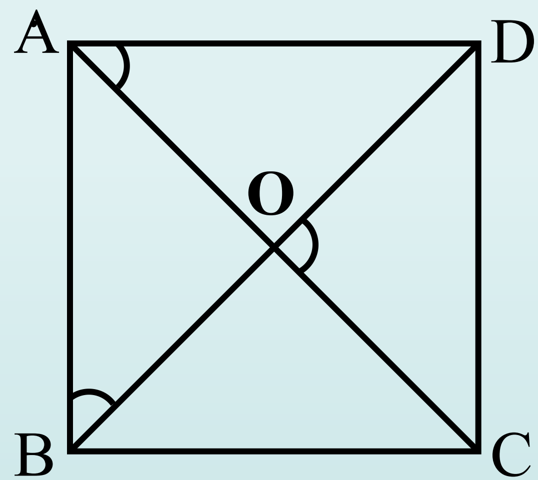
对称性

轴对称图形（4条对称轴）

做一做

1.如图，在正方ABCD中，∠DOC=___90___°，

∠ABD=___45___°，∠DAC=___45___°

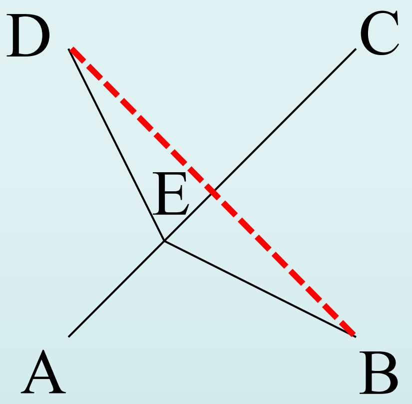


2.正方形的两条对角线把正方形分成4个全等的

___等腰直角___三角形

典例精析

例1.如图,在正方形ABCD中,点E在对角线AC上,那么BE与DE相等吗?为什么?



解: BE = DE.理由如下:

连接BD,

∵四边形ABCD是正方形,

∴AC垂直平分BD

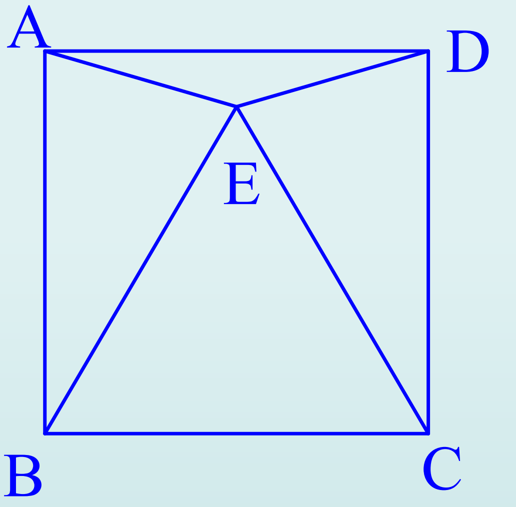
又点E在AC上

∴BE =DE

还可以用其他方法说明,试试看.

例2.已知：如图，在正方形ABCD中，ΔBEC是等边三角形，

求证：$\angle EAD = \angle EDA = 15^\circ$



证明：$\because \angle EBC = \angle ECB = \angle CEB = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABE$，$\triangle DCE$是等腰三角形，

$\angle ABE = \angle DCE = 30^\circ$

$\therefore \angle BAE = \angle BEA = \angle CDE = \angle CED = 75^\circ$

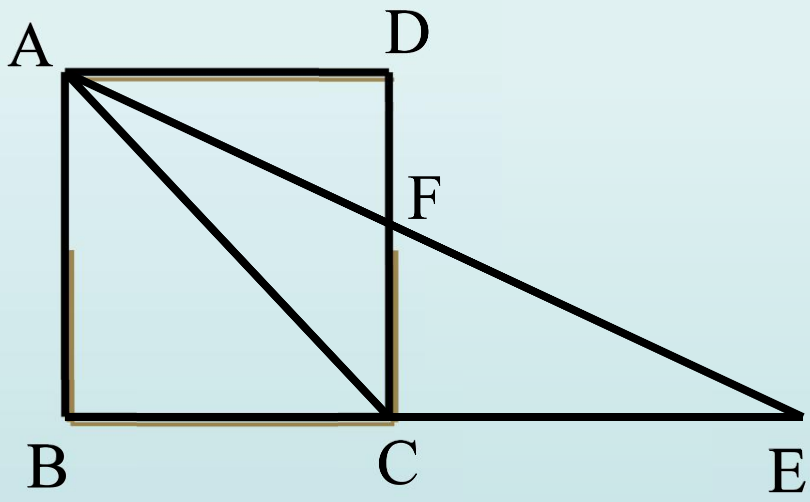
$\therefore \angle EAD = \angle EDA = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

做一做

如图,点E是正方形ABCD边BC上延长线上一点，且CE=AC，若AE交CD于点F，求∠E和∠AFC的度数.

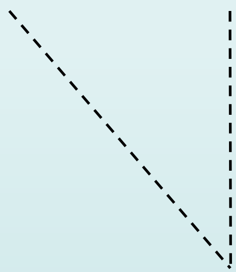
解：∠E =22.5

∠AFC=112.5



正方形的判定

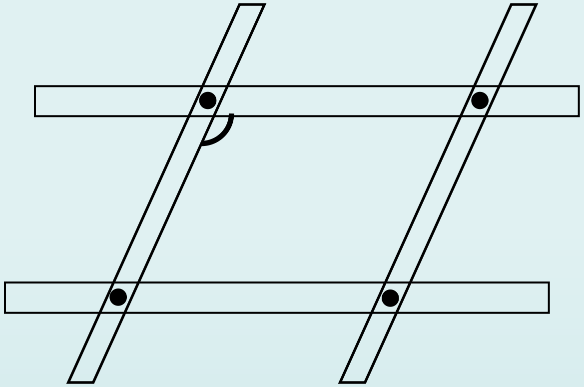
活动1：准备一张矩形的纸片，按照下图折叠, 然后展开，得到一个四边形.

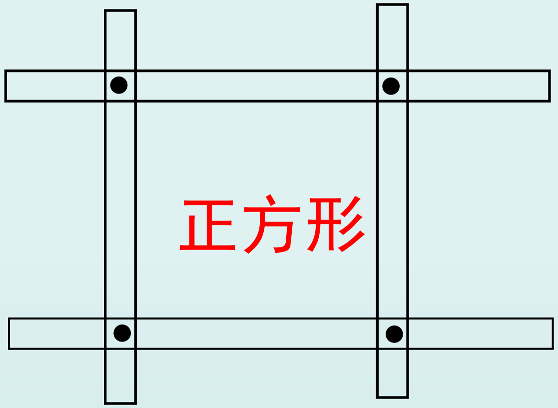


正方形

问题1：折叠后得到的特殊四边形是什么四边形？为什么？

活动2：把可以活动的菱形框架的一个角变为直角，观察这时菱形框架的形状.





问题2：经过变化后得到特殊四边形是什么四边形？

总结归纳

正方形判定的两条途径：

（1） 先判定菱形 + 一个直角 矩形条件 正方形

（2） 先判定矩形 + 一组邻边相等 菱形条件 正方形

练一练

在四边形ABCD中，O是对角线的交点，能判定这个四边形是正方形的是（ C ）

A．AC=BD，AB∥CD，AB=CD

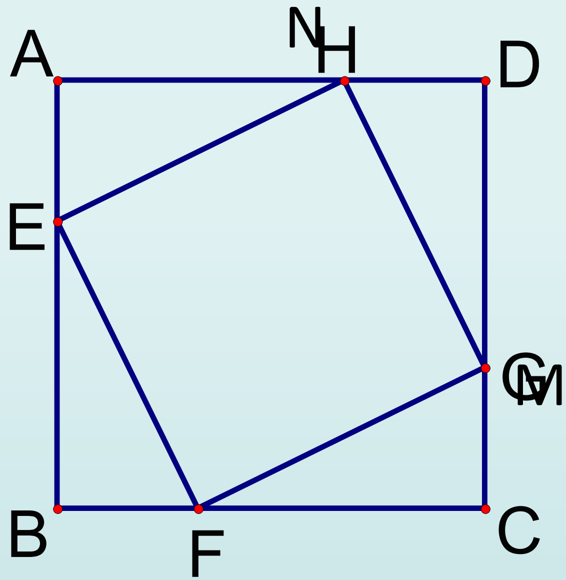
B．AD∥BC，∠A=∠C

C．AO=BO=CO=DO，AC⊥BD

D．AO=CO，BO=DO，AB=BC

例3.在正方形ABCD中，点E、F、G、H分别在各边上，且AE=BF=CM=DN．四边形EFMN是正方形吗?为什么?

分析：由已知可证△AEN≌△BFE≌△CMF≌△DNM，得四边形EFMN是菱形，再证有一个角是直角即可.



证明：∵四边形ABCD是正方形，

∴AB=BC=CD=DA，

∠A=∠B=∠C=∠D=90°，

∵AE=BF=CM=DN，

∴AN=BE=CF=DM.

在△AEN、△BFE、△CMF、△DNM中，

$$\begin{cases} AE=BF=CM=DN \\ \angle A=\angle B=\angle C=\angle D \\ AN=BE=CF=DM \end{cases}$$

∴△AEN≌△BFE≌△CMF≌△DNM

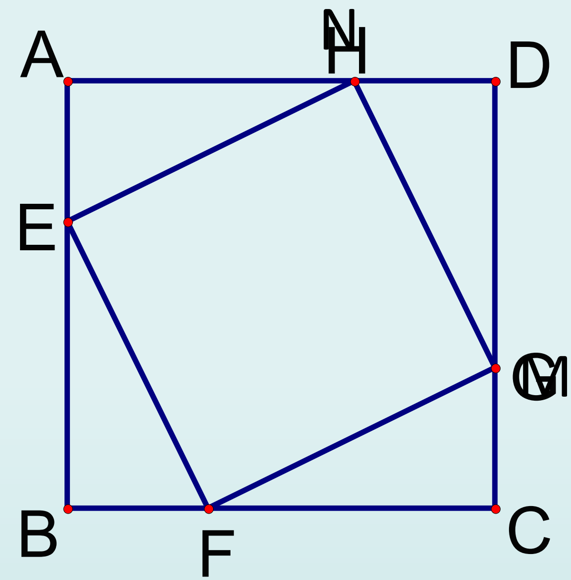
∴EN=FE=MF=NM，∠ANE=∠BEF

∴四边形EFMN是菱形，

∠NEF=180°-（∠AEN+∠BEF）

=180°-（∠AEN+∠ANE）=180°-90°=90°.

∴四边形EFMN是正方形.



例4.如图，在直角三角形中，∠C=90°，∠A、∠B的平分线交于点D.DE⊥AC，DF⊥AB.求证:四边形CEDF为正方形

证明：∵ DE⊥AC，DF⊥AB

∴∠DEC= ∠DFC=90°.

又∵ ∠C=90 °

∴四边形ADFC是矩形.

过点D作DG⊥AB，垂足为G

∵AD是∠CAB的平分线

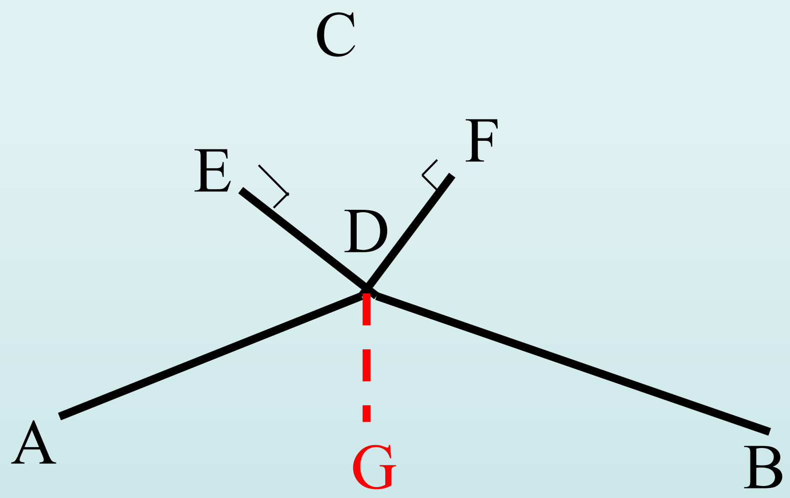
DE⊥AC，DG⊥AB

∴ DE=DG

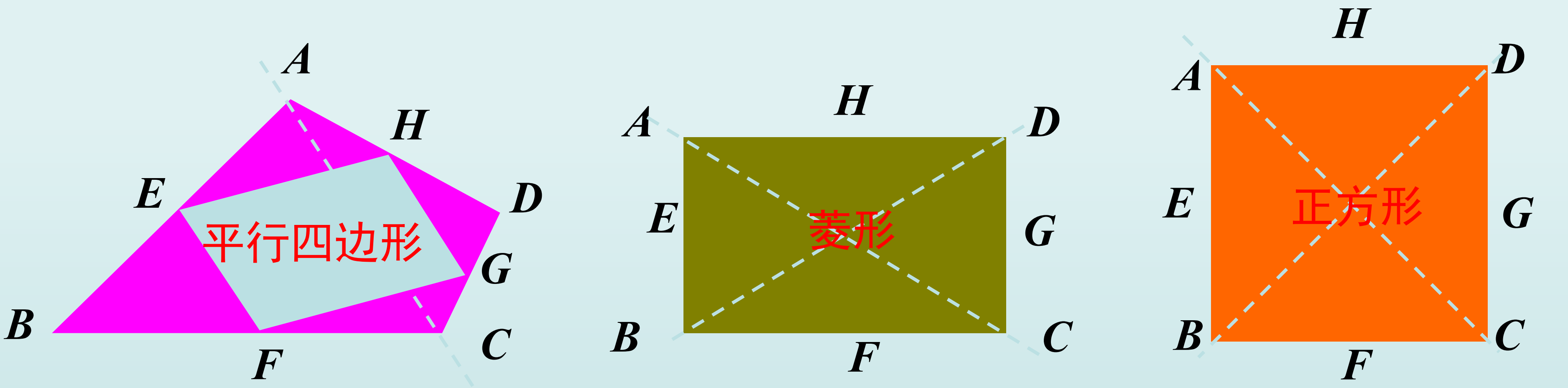
同理：DG=DF

∴ED=DF

∴四边形ADFC是正方形.



做一做：顺次连接任意四边形各边中点所得的四边形是平行四边形.顺次连接矩形、正方形各边中点能得到怎样的特殊平行四边形？



任意四边形　　矩形　　正方形

当堂练习

1. 判断下列命题是否正确.

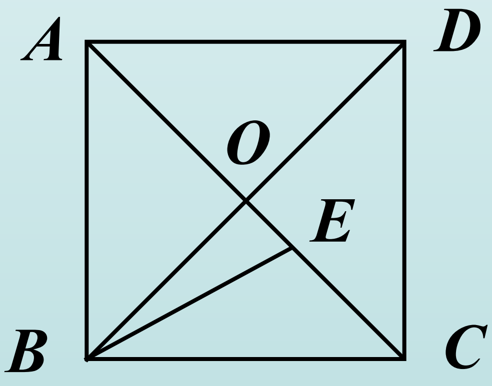
（1）对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形.

（2）对角线互相垂直的矩形是正方形.

（3）对角线相等的菱形是正方形.

（4）对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形.

2.在正方形$ABCD$中，E是对角线AC上一点，且$AE=AB$，则$\angle EBC$的度数为__22.5°__.



3.如图，已知正方形$ABCD$，以AB为边向正方形外作等边$\triangle ABE$，连结DE、CE，求$\angle DEC$的度数.

解：$\because \triangle ABE$是等边三角形.

$\therefore AB=AE=BE$,

$\angle ABE=\angle BEA=\angle EAB=60^\circ$.

又$\because$四边形$ABCD$是正方形.

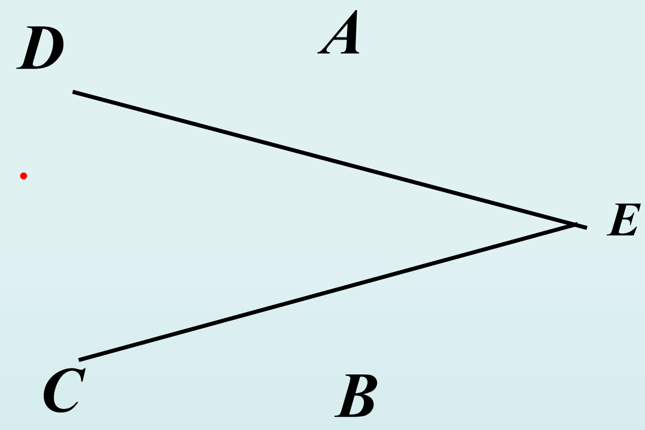
$\therefore AD=BC=AE=BE$,

$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$.

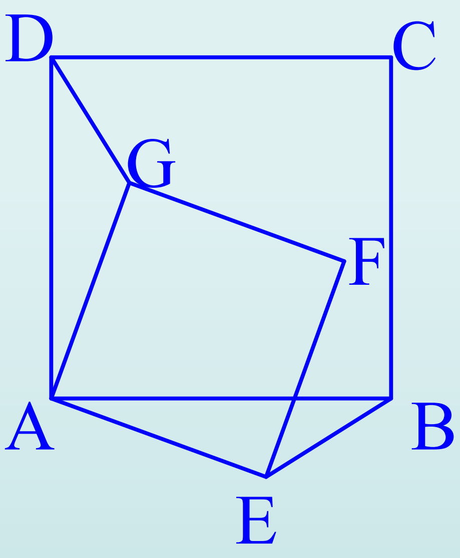
$\therefore \angle DAE=\angle CBE=150^\circ$.

$\therefore \angle AED=\angle EDA=\angle CEB=\angle BCE=15^\circ$.

$\therefore \angle DEC=\angle AEB-\angle AED-\angle CEB=30^\circ$.



4.已知：如图所示，在正方形ABCD和正方形AEFG有一具公共顶点A，把正方形AEFG绕A点旋转到如图所示位置，连结DG、BE.试说明：DG＝BE.



证明：根据正方形的性质

可得AD=AB，AG=EF

又由旋转可得

∠DAG=∠BAE

∴△ DAG≌△ BAE（SAS)

∴DG=BE

5.在正方形ABCD中，AC=10，P是AB上任意一点，PE⊥AC于点E，PF⊥BD于点F，求PE+PF的值.

解：连接PO

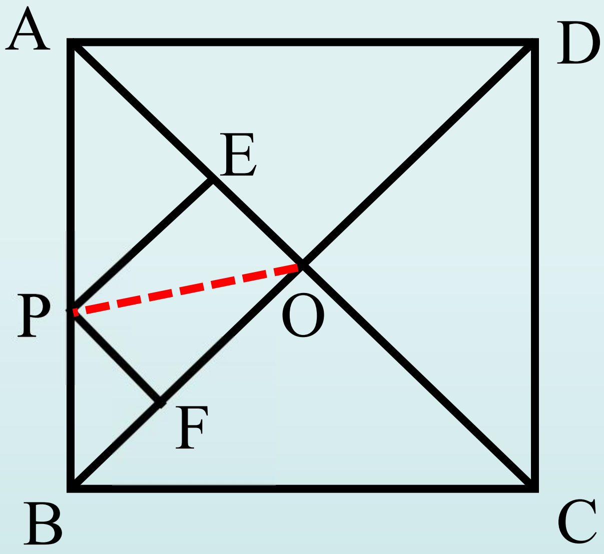
∵四边形ABCD是正方形，

∴$AC\perp BD$，$AO=BO=\frac{1}{2}AC$.

∵$S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}=S_{\triangle ABO}$

∴$\frac{1}{2}AO\cdot PE+\frac{1}{2}BO\cdot PF=\frac{1}{2}AO\cdot BO$

∴$PE+PF=AO=\frac{1}{2}AC=5$.



6.如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BC$，对角线BD平分$\angle ABC$，P是BD上一点，过点P作$PM\perp AD$，$PN\perp CD$，垂足分别为M、N.

(1) 求证：$\angle ADB=\angle CDB$;

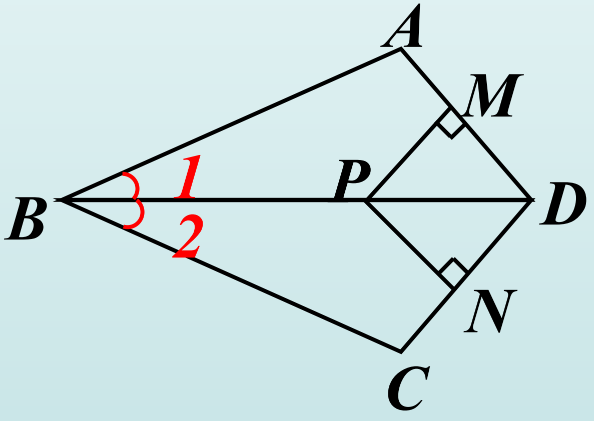
(2) 若$\angle ADC=90°$，求证：四边形$MPND$是正方形.

证明：（1）$\because AB=BC, BD$平分$\angle ABC$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$ (AAS).

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

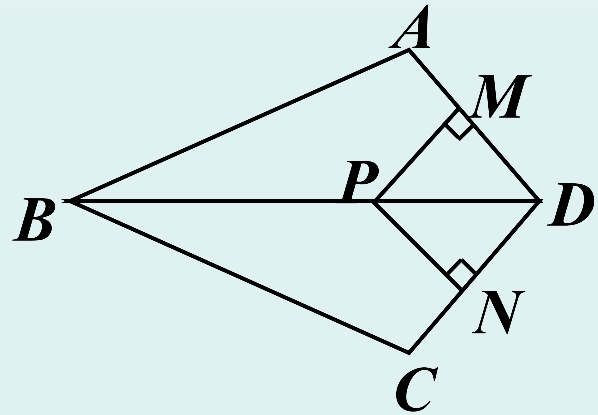


（2）∵$\angle ADC=90°$；

又∵$PM \perp AD, PN \perp CD$;

∴$\angle PMD=\angle PND=90°$．

∴四边形$NPMD$是矩形.



∵$\angle ADB=\angle CDB$;

∴$\angle ADB=\angle CDB=45°$．

∴$\angle MPD=\angle NPD=45°$．

∴$DM=PM, DN=PN$.

∴四边形$NPMD$是矩形（有一组邻边相等的矩形是正方形）．

课堂小结

正方形

定义

有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形

性质

1. 四个角都是直角

2. 四条边都相等

3. 对角线相等且互相垂直平分

判定

1. 平行四边形+一组邻边相等+一个直角

2. 矩形+一组邻边相等

3. 菱形+一个直角

课后作业