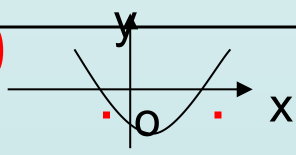
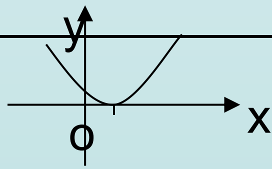
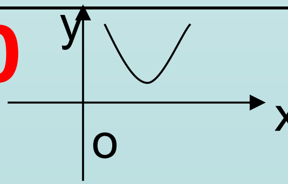
二次函数与一元二次方程

要点回顾

对于二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，当$y=0$时，函数即可化为一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，这时方程的根就是抛物线与x轴交点的横坐标.

$y=ax^2+bx+c$的图象和x轴交点	方程$ax^2+bx+c=0$的根	b^2-4ac	函数的图象
有两个交点	方程有两个不相等的实数根	$b^2-4ac>0$	
只有一个交点	方程有两个相等的实数根	$b^2-4ac=0$	
没有交点	方程没有实数根	$b^2-4ac<0$	

简单运用

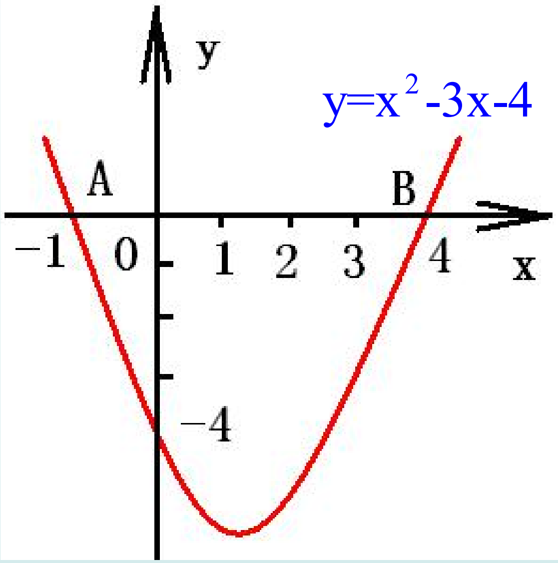
如图,$y=x^2-3x-4$的图象,回答问题:

(1)二次函数的图象与x轴的交点A、B的坐标分别是A(,),B(,).

(2)当x=( )时,函数$y=x^2-3x-4$的值y=0.

(3)求方程$x^2-3x-4=0$的解.

(4)方程$x^2-3x-4=0$的解与二次函数$y=x^2-3x-4$的交点的横坐标之间有什么关系?



答案:

（1）A（-1，0），B（4，0）；

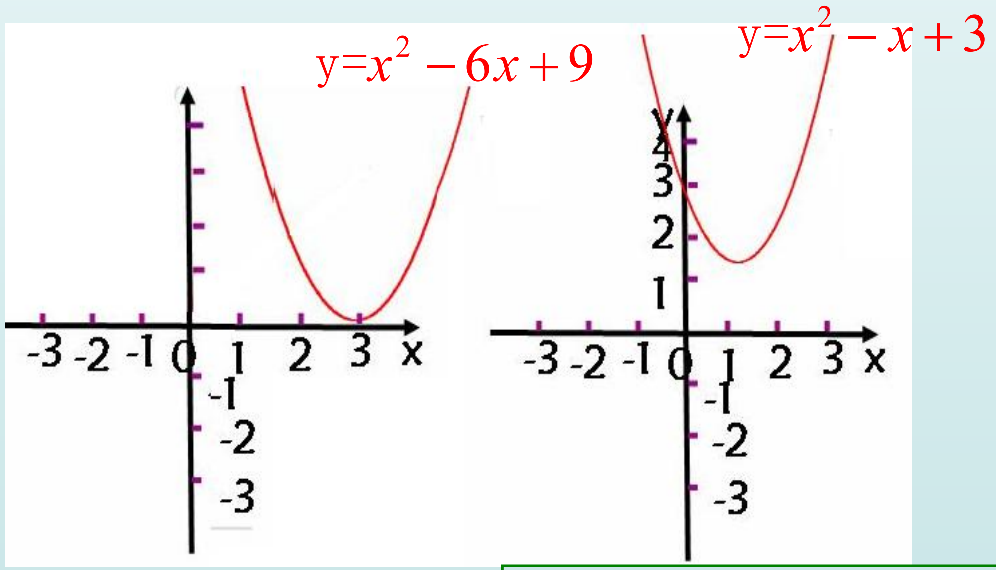
（2）x=-1或4；

（3） x=-1或4；

（4）方程的解就是二次函数的交点的横坐标。

变式训练

观察下列图象，分别说出一元二次方程$x^2-6x+9=0$,
$x^2-x+3=0$的根的情况。



答案:

方程$x^2-6x+9=0$的解是$x_1=x_2=3$.

方程$x^2-x+3=0$无实数根.

例题精析

例1：已知二次函数$y=mx^2+x-1$.

(1)当m为何值时，函数的图象x轴有两个交点？

(2)若函数的图象与x轴有交点,求m的取值范围.

(3) 当函数的图象与x轴相切时，求m的取值范围.

[解析]

由二次函数的图象与x轴的交点的个数与其所对应的一元二次方程的根的个数的关系，来确定Δ的取值范围，进而求出m的取值范围。

(1) 有两个交点$\Rightarrow \Delta \succ 0$;

(2) 有交点$\Rightarrow \Delta \geq 0$;

(3) 相切$\Rightarrow$只有一个交点$\Rightarrow \Delta=0$.

答案：

(1)$m \prec -\frac{1}{4}$;

(2)$m \geq -\frac{1}{4}$且$m \neq 0$;

(3)$m=-\frac{1}{4}$.

小试牛刀

1.试判断下列各函数的图象与x轴有没有公共点,并说明理由。

$(1)y=x^2-x;(2)y=-x^2+6x-9;(3)y=3x^2+6x+11.$

答案:
（1）△＞0，函数的图象与x轴有两个交点；
（2）△＝0，函数的图象与x轴有一个交点；
（3）△＜0，函数的图象与x 轴没有交点。

2.若函数$y=(m+1)x^2-(m+1)x+1$的图象与x轴只有一个公共点, 求m的值.

解析:

$\because$二次函数$y=(m+1)x^2-(m+1)x+1$的图象与x轴只有一个公共点,

$\therefore$方程$(m+1)x^2-(m+1)x+1=0$有两个相等的实数根,

即$\Delta=(m+1)^2-4\cdot(m+1)=0$

解之得$m_1=-1,m_2=3.$

又$\because a=m+1\neq 0,\therefore m\neq -1,$

$\therefore m$的值为3.

思维迁移

例2.(2010·漳州)阅读材料,解答问题:

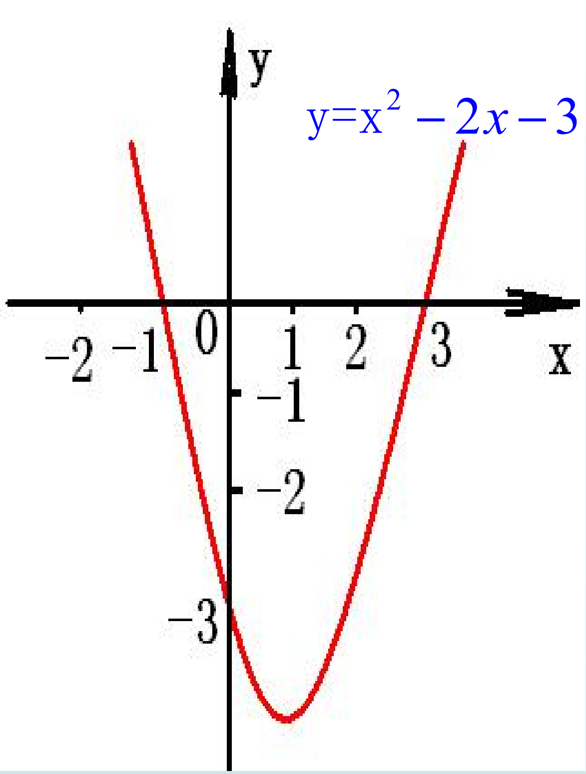
例:用图象法解一元二次不等式$x^2-2x-3>0$.

解:设$y=x^2-2x-3$,则y是x的二次函数.

$\because a=1>0$,$\therefore$抛物线开口向上.

又$\because$当y=0时,$x^2-2x+3=0$,解得$x_1=-1$,$x_2=3$.

抛物线$y=x^2-2x+3$的大致图象如图所示:



观察图象可知:

当$x<-1$或$x>3$时,$y>0$.

$\therefore x^2-2x+3>0$的解集是:$x<-1$或$x>3$.

问题:

(1)观察图象,直接写出一元二次不等式$x^2-2x+3<0$的解集;

(2)仿照上例,用图象法解一元二次不等式$x^2-1>0$(画大致图象即可).

[解析]

本题要求通过对所给材料的阅读自学, 运用二次函数图像的增减性（旧知识）来解决一元二次不等式（新知识）。

问题（1）据已知的图像就可得: x轴上方 $\Rightarrow y \succ 0$； x轴上 $\Rightarrow y=0$； x轴下方 $\Rightarrow y \prec 0$.

问题（2）需依照例子, 画出图像，再据图像性质得出。

解：（1）$-1 \prec x \prec 3$.

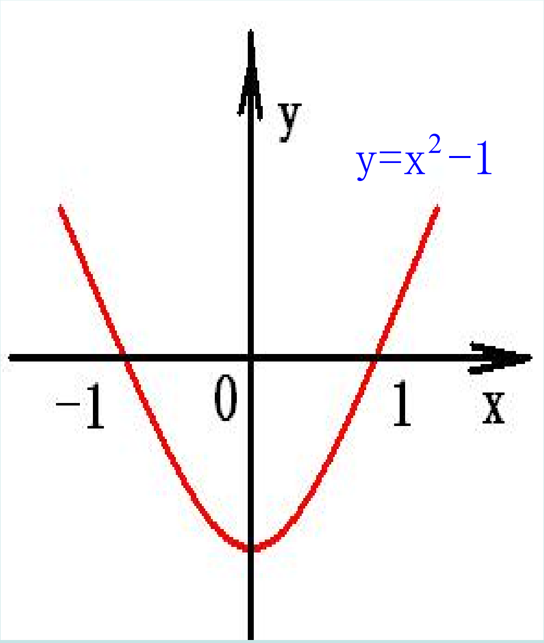
（2）设$y=x^2-1$，则y是x的二次函数.

$\because a=1 \succ 0$, $\therefore$ 抛物线开口向上.

又$\because$ 当y=0时，$x^2-1=0$，

解得$x_1=-1$, $x_2=1$.

$\therefore$ 由此得抛物线的大致图象如图所示：



观察函数图象可知：

当$x \prec -1$或$x \succ 1$时，

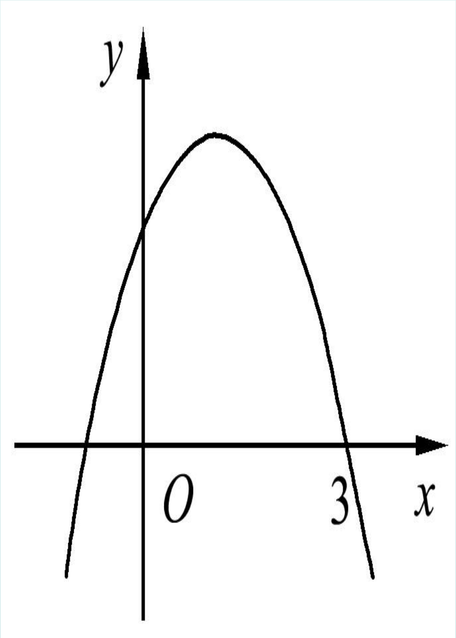
x^2-1的解集是：$x \prec -1$或$x \succ 1$.

基础过关

1．在平面直角坐标系中，抛物线$y=2x^2-x-3$与x轴的交点的个数是（ B ）

A.3　B.2　C.1　D.0

2.已知二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的图象如图所示，则下列结论正确的是（ D ）



A.$a>0$　B. $c<0$

C.$b^2-4ac<$　D. $a+b+c>0$

能力提升

4.已知抛物线$y=x^2+mx+m-2$

.求证：无论 m取何值,抛物线总与x轴有两个交点.

证明：∵△= $m^2-4\times1\cdot(m-2)$

= m^2-4m+8

= $(m-2)^2+4$

又∵不论m为何值，$(m-2)^2\geq0$

∴ $(m-2)^2+4>0$

∴△>0，

∴无论 m取何值，抛物线总与x轴有两个交点.

能力提升

5. 已知二次函数 $y=kx^2-6x-7$ 的图像与X轴有两个不同的交点.

（1） 求k的取值范围

（2） 当k为何值时，这两个交点横坐标的平方和等于50.

解：△= $36+28k$

∵ $36+28k>0$

∴k的取值为 $k\succ-\dfrac{9}{7}$

解： $x_1+x_2=\dfrac{6}{k}, x_1\cdot x_2=-\dfrac{7}{k}.$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=50,$

$(\dfrac{6}{k})^2-2\times(-\dfrac{7}{k})=50,$

解之得： $k=\pm1.$

k的取值为 $k\succ-\dfrac{9}{7}$

∴k的值为±1.

要点小结

一般地，关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的根就是二次函数$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$的值为0时自变量x的值，也就是函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴交点的横坐标。

可由一元二次方程的根的判别式来判定二次函数图象与x轴的交点的情况，由根与系数的关系来解决相关问题。

在函数问题中，往往需要解方程：反过来也可以利用函数图象解方程。

课后练习

1.已知抛物线$y=x^2-6x+a$与x轴有两个交点,则a的取值范围是多少?

2. 已知抛物线y=x$^2+px+q$与x轴的两个交点为$(-2,0)$,$(3,0)$,则p、q的值分别是多少?

3.已知二次函数$y=x^2+kx+k-2$.

(1)判别上述抛物线与x轴的交点情况;

(2)设抛物线与x轴交点之间的距离为$2\sqrt{5}$,求k的值.

4.设二次函数的图象与x轴交于A, B两点,与y轴交点点C,线段OA与OB的长的积等于60(点O是坐标原点),求m的值.